Trabajo final de Licenciatura en Cs. Matemáticas

Espacios de Priestley generalizados

Autor: Denis Anibal Tolaba

Director: Sergio A. Celani

Universidad Nacional del Centro

de la Provincia de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Matemática

2017

Índice general

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecerle a Sergio por proponerme este tema, por confiar en mí y ayudarme a realizar este trabajo.

A los docentes que han sido de mucha influencia en mi formación como profesor y licenciado. A todos aquellos compañeros de cátedra e integrantes del Departamento de Matemática que me han brindado su apoyo constante para que pudiera concluir esta etapa como estudiante.

En lo personal, a mis padres por apoyarme en todo sentido desde que inicié esta carrera, sin cuestionamientos y confiando en cada una de las decisiones que he tomado a lo largo de este camino.

A mis queridos hermanos por el aguante y cariño de siempre a pesar de la distancia que nos separa, principalmente a Sergio que no solo es mi hermano sino también mi primer amigo y me ha dado la posibilidad de ser tío de un hermoso sobrino.

A mi abuela Margarita, a quien recuerdo con mucho cariño por aquellos hermosos días de mi infancia.

A mis amigos de la vida. Diego y Fernán por las charlas de fútbol, los días de playa y los momentos de locura que hemos pasado.

A mis pseudo hermanas Juli, Flor y Yasmín por mantenernos unidos a pesar de la distancia y darme todo el cariño de una familia.

A Martin, Manu y Manolo por bancarme en las largas noches de estudio y compartir reencuentros, charlas y momentos de fútbol junto a Dami y Tin.

A todas las amistades que he conseguido gracias a esta carrera y aún seguimos en contacto por cualquier medio. En particular agradecer a Mauro quien es un gran referente y por sobre todo un gran amigo. A Lu, Flor, Sil, Anto, Lau, Nati y Dai que siempre me bancan, están al día con mi progreso y todos mis logros. Compartimos muchas cursadas y momentos de estudio, intensos, pesados, con altas y bajas así como también lindos momentos de ocio, paseos, mates y charlas.

Por último quiero dedicarle un especial agradecimiento a Lujan (Marilu como solían decirle) por hacerme un lugar en su familia y considerarme un hijo más. Son incontables las veces que me alentaste a terminar la carrera, a no quedarme estancado. Me hubiera encantado que pudieras verlo.

Nada de esto hubiera sido posible sin ustedes. Gracias!

Introducción

Las representaciones topológicas juegan un papel fundamental en muchas áreas de la matemática. En particular son importantes en el estudio de estructuras algebraicas ordenadas, como grupos reticulados, retículos distributivos, álgebras de Heyting, álgebras de Boole, MV-álgebras, etc. Los primeros trabajos en esta dirección corresponden a los estudios que inició Marshall H. Stone motivados por ciertos problemas en la teoría espectral de espacios de Hilbert. En su primer artículo [20] Stone demostró que toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de todos los conjuntos cerrados y abiertos de un espacio topológico compacto satisfaciendo la propiedad de que el conjunto de los abiertos y cerrados del espacio forman una base. Este tipo de espacios son conocidos como espacios Booleanos o *espacios de Stone*. Posteriormente, en el artículo [19], el mismo Stone extendió su representación al caso de retículos distributivos y álgebras de Heyting, probando que todo retículo distributivo puede ser identificado como el conjunto de los abiertos y compactos de un espacio topológico T_0 con la propiedad de que la familia de todos los abiertos y compactos son una base de abiertos cerrada bajo intersecciones finitas. Esta clase de espacios son conocidos como *espacios espectrales*. Los trabajos de Stone estaban motivados por problemas surgidos en el Análisis Funcional, pero la influencia de estos trabajos en otras ramas de la Matemática ha sido fundamental. Particularmente produjo un fuerte impacto en Lógica Matemática, Teoría de Categorías, Computación teórica [22], Teoría de la Medida y Topología General [14] y anillos conmutativos unitarios [13].

Los trabajos de Stone fueron los cimientos de una nueva rama de la matemática, conocida hoy como Teoría de dualidades. Esta rama intenta estudiar con herramientas categóricas dualidades o equivalencias entre categorías algebraicas y categorías donde los objetos son algún tipo de espacio topológico. Todas estas dualidades son conocidas como dualidades tipo Stone cuando son extensiones o generalizaciones de la dualidad desarrollada en los primeros trabajos de M. Stone. Otra rama de la matemática originada en los trabajos de Stone es la que hoy se conoce como topología sin puntos (pointless topology) [14] y es una de las técnicas más importantes en el estudio de semánticas formales.

Varias décadas después de los fundamentales trabajos de Stone, a fines de los 60 y principios de los 70, Hilary Priestley definió la clase de los espacios topológicos ordenados compactos y totalmente disconexos en el orden [17, 18]. Un espacio de Priestley se puede ver como un espacio de Stone con un orden adicional que interactúa con la topología de una forma particular. Estos espacios son conocidos como *espacios de Stone ordenados, o espacios de Priestley*. En este caso el conjunto de los abiertos-cerrados y crecientes de un espacio de Priestley forman un retículo distributivo acotado bajo las operaciones usuales de intersección y unión de conjuntos. H. Priestley demostró que todo retículo distributivo acotado es isomorfo al conjunto de todos los abiertos-cerrados y crecientes de un espacio de este tipo. Por lo tanto tenemos otro clase de representación para los retículos distributivos más geométrica que la representación original de Stone. La dualidad de Priestley resultó ser una técnica muy útil en el estudio de estructuras algebraicas ordenadas, principalmente aquellas que son semánticas algebraicas de lógicas proposicionales.

Todo retículo distributivo consta de dos estructuras conviviendo entre sí. Si $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un retículo distributivo, entonces $\langle L, \vee\rangle$ y $\langle L, \wedge\rangle$ son semiretículos de tal forma que producen el mismo orden y que están relacionados por las propiedades de absorción:

- $x \wedge (x \vee y) = x$
- $x \vee (x \wedge y) = x.$

Por otra parte, un resultado conocido afirma que todo retículo es distributivo si y sólo si el retículo de sus filtros es distributivo. Este resultado también puede ser formulado en términos de ideales. Todo retículo es distributivo si el retículo de sus ideales es distributivo. Si ahora únicamente consideramos un semiretículo con ínfimo y último elemento $\langle L, \wedge, 1\rangle$ de tal forma que todo par de elementos tenga cota superior, es posible demostrar que el conjunto de los filtros forma un retículo. Esto se debe a que en la definición de filtro intervienen únicamente el orden y la operación de ínfimo. La operación de supremo no juega ningún papel. Por lo tanto, es natural estudiar la clase de los semiretículos con ínfimo donde el conjunto de los filtros sea distributivo. George Grätzer [12] fue uno de los primeros en observar la importancia de los semiretículos con la propiedad de que los filtros forma un retículo distributivo. A tales semiretículos se los denomina semiretículos distributivos. Grätzer probó que la representación topológica desarrollada por Stone podía generalizarse al caso de los semiretículos distributivos, para lo cual introdujo ciertos espacios topológicos que resultan una generalización natural de los espacios espectrales. Siguiendo esta línea de trabajo, en los artículos [6], [7] y [8] se profundizó el estudio de esta clase de estructuras, dando diferentes caracterizaciones de esta noción de distributividad y completando los resultados sobre representación que había comenzado Grätzer hasta obtener una dualidad categórica completa. La novedad principal de [6] es la caracterización de homomorfismos de $\wedge$-semiretículos que preservan último elemento por medio de ciertas relaciones binarias definidas entre ciertos espacios espectrales. Es importante destacar que un retículo acotado $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es distributivo si y sólo si el semiretículo $\langle L, \wedge, 1\rangle$ es distributivo. De igual manera, es posible probar que si $\langle L, \wedge, \rightarrow, 1\rangle$ es un semiretículo implicativo, entonces el reducto $\langle L, \wedge, 1\rangle$ es distributivo [9], [15], [7].

Como ya mencionamos anteriormente, los semiretículos distributivos tienen una buena representación topológica por medio de una generalización de los espacios espectrales. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Es posible construir una representación al estilo Priestley de los semiretículos distributivos? Es decir ¿podemos construir una representación topológica, pero utilizando espacios topológicos ordenados de tal forma que cuando estemos en presencia de un retículo distributivo acotado obtengamos la dualidad original de Priestley? La respuesta es afirmativa. En los artículos [2] y [3] Guram Bezhanishvili y Ramón Jansana desarrollaron una completa representación y dualidad para los semiretículos distributivos con primer elemento a través de una generalización de los espacios de Priestley. Más precisamente en [2] se definen los espacios de *Priestley generalizados* como cuaternas $\langle X, X_0, \leq, \tau\rangle$ donde $\langle X, \leq, \tau\rangle$ es un espacio de Priestley, y X_0 es un subconjunto denso del espacio topológico $\langle X, \tau\rangle$ tal que para cada $x \in X$ existe un y$\in X_0$ tal que $x \leq y$, y satisfaciendo algunas propiedades. Como se demuestra en este artículo, existe una dualidad categórica entre la categoría de los espacios de Priestley generalizados junto con apropiados morfismos, y la categoría de los semiretículos distributivos con primer elemento y apropiados morfismos. Esto permitió, entre otras aplicaciones, caracterizar topológicamente a los filtros de semiretículos, a los ideales de orden, a los ideales de Frink, a los filtros optimales, etc. Otra importante aplicación de esta dualidad se muestra en el artículo [3], donde se prueba la conexión de la familia de subsemiretículos distributivos de un semiretículo dado y ciertas relaciones definidas en el espacio de Priestley dual. Es interesante destacar que todo espacio de Priestley generalizado tiene asociado un espacio tipo espectral cuyo conjunto soporte es el subconjunto X_0. Estos resultados sirven para relacionar la representación tipo Stone dada en [6] con esta nueva representación.

Hay dos diferencias importantes entre las dos representaciones discutidas. Por un lado, los espacios tipo Stone o espectrales utilizados en los trabajos [6] y [8] son espacios T_0, y el orden asociado es el orden usual que se define en cualquier espacio topológico T_0. En cambio los espacios de Priestley generalizados son T_2 y el orden $\leq$ no es el mismo orden que el asociado a la topología. Otra diferencia importante es la complejidad de la definición. La definición de los espacios tipo Stone es mucho más sencilla. En cambio la definición de los espacios de Priestley generalizados es bastante más compleja, pues interviene no solamente el conjunto base, sino también un orden y un subconjunto distinguido. Pero esa mayor complejidad se compensa por visión geométrica de la dualidad y por las aplicaciones.

El objetivo de este trabajo es presentar de una forma unificada y lo más accesible posible, los principales resultados sobre la representación topológica para los semiretículos distributivos con primer elemento utilizando espacios de Priestley generalizados y dar algunas aplicaciones de esta representación. Aprovecharemos estos resultados para determinar una dualidad para la variedad de los semiretículos implicativos acotados, para lo cual introduciremos la noción de espacios generalizados de Esakia.

Este trabajo está dividido en dos partes. La primera abarca los capítulos 1 y 2, y está destinada a recordar los conceptos y resultados fundamentales para el desarrollo de los siguientes capítulos. En la segunda que abarca los capítulos 3, 4 y 5, se presenta la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados, luego se desarrolla tal dualidad para el caso de semiretículos distributivos acotados, su extensión para semiretículos implicativos acotados y su relación con la extensión distributiva libre de semiretículos distributivos.

En el capítulo 1 introduciremos las nociones básicas asociadas a conjuntos ordenados, retículos y semiretículos. Y daremos nociones generales de filtros e ideales para semiretículos que nos permitirán desarrollar una representación topológica para $\wedge$-semiretículos distributivos acotados.

En el capítulo 2 recordaremos los principales conceptos y resultados de los trabajos [6], [8] y [12] sobre la dualidad de tipo Stone para $\wedge$-semiretículos distributivos acotados. Varios de estos resultados son aplicados o generalizados en los próximos capítulos.

En el Capítulo 3, en primer lugar, recordaremos la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados. Comprobaremos que todo retículo distributivo acotado tiene asociado un espacio de Priestley y recíprocamente todo espacio de Priestley tiene asociado un retículo distributivo acotado. En la sección siguiente daremos una representación topológica para $\wedge$-semiretículos distributivos acotados por medio de filtros optimales. Esta representación resulta ser la idea principal para la introducción de los espacios de Priestley generalizados que se define en la siguiente sección. Comprobaremos que todo espacio de Priestley generalizado tiene asociado un $\wedge$-semiretículo distributivo acotado y recíprocamente cada $\wedge$-semiretículo distributivo acotado tiene asociado un espacio de Priestley generalizado. Luego daremos una dualidad entre homomorfismos de $\wedge$-semiretículos distributivos acotados y morfismos de Priestley generalizados. Veremos que los morfismos entre espacios de Priestley generalizados son relaciones binarias definidas entre espacios de Priestley generalizados. Por último veremos que todo espacio de Priestley generalizado. tiene asociado un DS-espacio acotado.

En el Capítulo 4 daremos la nociones básicas para $\wedge$-semiretículos implicativos y espacios de Esakia. Extenderemos esta última a la noción de espacio de Esakia generalizado y desarrollaremos su dualidad de tipo Priestley a partir de los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

En el Capítulo 5 daremos una nueva noción de homomorfismos de semiretículos, los cuales preservan los supremos en caso que existan. Esta clase de homomorfismos serán útiles en la construcción de la extensión distributiva libre para semíreticulos distributivos. Mostraremos que para cada semiretículo distributivo dicha extensión existe y es única salvo isomorfismos. Por último mostraremos algunas aplicaciones de la extensión distributiva libre.

1 Conceptos preliminares

En este capítulo introduciremos las definiciones básicas y teoremas necesarios sobre conjuntos ordenados, retículos y semiretículos que utilizaremos en el resto del trabajo. Se puede consultar los libros [1] y [5] para ver las demostraciones y resultados correspondientes.

1.1. Conjuntos ordenados

Definición 1.1. Un orden definido en un conjunto X es una relación binaria "$\leq$" en X tal que para todo $x, y, z \in X$, se cumplen las siguientes condiciones:

1. $x \leq x$ (reflexiva).
2. Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces se $x = y$ (antisimétrica).
3. Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces ser $x \leq z$ (transitiva).

El par $(X, \leq)$, donde $\leq$ es un orden sobre X, se dirá **conjunto (parcialmente) ordenado**.

Definición 1.2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es *creciente*, si para todo $x \in X$, $y \in Y$ tal que $y \leq x$, entonces $x \in Y$. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es *decreciente*, si para todo $x \in X$, $y \in Y$ tal que $x \leq y$, entonces $x \in Y$.

El menor subconjunto creciente que contiene a un subconjunto $Y \subseteq X$ es el conjunto

$$[Y\rangle = \{x \in X : y \leq x, \text{ para algún } y \in Y\}.$$

De forma análoga, el menor subconjunto decreciente que contiene a un conjunto $Y \subseteq X$ como

$$\langle Y] = \{x \in X : y \geq x, \text{ para algún } y \in Y\}.$$

Para el caso que $Y = \{a\}$, denotaremos por $[\{a\}\rangle = [a\rangle$ y $\langle\{a\}] = \langle a]$ a los conjuntos creciente y decreciente generados por a respectivamente.

Dado un conjunto ordenado $(X, \leq)$, el conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X será simbolizado por $\mathcal{P}_c(X)$. De manera similar, el conjunto de todos los subconjuntos decrecientes de X será simbolizado por $\mathcal{P}_d(X)$. Observemos que $(\mathcal{P}_c(X), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}_d(X), \subseteq)$ son conjuntos ordenados.

1.2. Retículos y semiretículos

Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $a, b \in X$. El supremo y el ínfimo del conjunto $\{a, b\}$, si existen, serán simbolizados por $a \vee b$ y $a \wedge b$, respectivamente. Es decir:

$$\sup\{a, b\} = a \vee b$$
$$\text{ínf}\{a, b\} = a \wedge b$$

En el caso de un subconjunto $K \subseteq L$, el supremo y el ínfimo de K será simbolizado por $\bigvee K$ y $\bigwedge K$ respectivamente.

Definición 1.3. Sea $(L, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $(L, \leq)$ es un **retículo** si para todo subconjunto finito $K \subseteq L$ existe el supremo $\bigvee K$ y el ínfimo $\bigwedge K$.

A partir de ahora, sin lugar a confusión, un retículo $(L, \wedge, \vee)$ será denotado directamente por su conjunto soporte L.

Definición 1.4. Sea L un retículo.

- Diremos que L tiene *primer elemento* si existe un elemento, que denotaremos por 0, tal que $0 \leq x$, para todo $x \in L$.
- Diremos que L tiene *último elemento* si existe un elemento, que denotaremos por 1, tal que $x \leq 1$, para todo $x \in L$.
- Diremos que un retículo L es *acotado* si existe primer elemento 0 y último elemento 1. Es decir:
$$0 \leq x \leq 1, \quad \text{para todo } x \in L.$$
- Un retículo L es *completo* si existe el ínfimo y el supremo de cualquier subconjunto no vacío.

Definición 1.5. Sea L un retículo. Diremos que L es *distributivo* si para todo $a, b, c \in L$, se cumple que
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$
Es sencillo comprobar que la condición de distributividad de la definición anterior es equivalente a
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$
Al igual que en la definición de retículos, podemos definir a un semiretículo como un conjunto ordenado cumpliendo determinadas propiedades.

Definición 1.6. Sea $(S, \leq)$ un conjunto ordenado. Diremos que $(S, \leq)$ es un *supremo-semiretículo,* o simplemente $\vee$-semiretículo, si para todo par de elementos $a, b \in S$, existe el supremo $a \vee b$.

Diremos que $(S, \leq)$ es un *ínfimo-semiretículo,* o simplemente $\wedge$-semiretículo, si para todo par de elementos $a, b \in S$, existe el ínfimo $a \wedge b$.

Los semiretículos pueden ser caracterizados como estructuras algebraicas como veremos a continuación.

Definición 1.7. Un *semiretículo* es un álgebra $S = (S, \circ)$ del tipo (2) que satisface las siguientes identidades:

1. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,
2. $x \circ y = y \circ x$,
3. $x \circ x = x$.

Es decir, $\circ$ es una operación binaria asociativa, conmutativa e idempotente.

Sea S un semiretículo. Diremos que S tiene *último elemento* si existe un elemento, que denotaremos por 1, tal que $x \leq 1$, para todo $x \in S$.

Dado un semiretículo $S = (S, \circ)$, podemos definir las siguientes relaciones binarias $\leq_\wedge, \leq_\vee$ en S como:

$$a \leq_\wedge b \quad \text{si y sólo si} \quad a \circ b = a$$

y

$$a \leq_\vee b \quad \text{si y sólo si} \quad a \circ b = b,$$

respectivamente.

Mostraremos que las relaciones $\leq_\wedge$ y $\leq_\vee$ son ordenes parciales sobre S, que se denominan *el orden inducido por* $\circ$.

Teorema 1.8. *Sea $S = (S, \circ)$ un semiretículo y sean $\leq_\wedge$ y $\leq_\vee$ las relaciones binarias definidas anteriormente. Entonces*

- $(S, \leq_\wedge)$ es un $\wedge$-semiretículo en el cual $a \wedge b = a \circ b$, para todo $a, b \in S$, y
- $(S, \leq_\vee)$ es un $\vee$-semiretículo en el cual $a \vee b = a \circ b$, para todo $a, b \in S$.

Demostración. Veamos que el par $(S, \leq_\wedge)$ es un $\wedge$-semiretículo. Primero debemos probar que la relación $\leq_\wedge$ es un orden sobre S. De la condición 3., se tiene que $\leq_\wedge$ es reflexivo, pues $a \leq_\wedge a$ si y sólo si $a \circ a = a$. Si $a \leq_\wedge b$ y $b \leq_\wedge a$, entonces se tiene que $a = a \circ b = b \circ a = b$ utilizando la condición 2. Es decir, $\leq_\wedge$ es antisimétrica. Finalmente, si $a \leq_\wedge b$ y $b \leq_\wedge c$, entonces por la condición 1. se tiene que $a \circ c = (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ b = a$, es decir que $a \circ c = a$ y sucede si y sólo si $a \leq_\wedge c$, lo cual prueba que $\leq_\wedge$ es transitiva. Por lo tanto $\leq_\wedge$ es un orden parcial sobre S.

Probemos que $a \circ b = a \wedge b$, para todo par de elementos $a, b \in S$. Claramente se ve que $a \circ b$ es una cota inferior de $\{a, b\}$, dado que $a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$, entonces $a \circ b \leq_\wedge a$, y se prueba de manera similar que $a \circ b \leq_\wedge b$. Veamos que $a \circ b$ es la mayor de las cotas inferiores. Sea c otra cota inferior de $\{a, b\}$, entonces $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$, por consecuencia $c \leq_\wedge a \circ b$, probando que $a \circ b$ es la mayor cota inferior de $\{a, b\}$. Por lo tanto tenemos que $a \wedge b = a \circ b$.

Con argumentos similares se demuestra que $\leq_\vee$ es un orden parcial sobre S, y que el par $(S, \leq_\vee)$ es un $\vee$-semiretículo. $\square$

Dado un retículo L, se le puede asociar dos semiretículos. Un $\wedge$-semiretículo y un $\vee$-semiretículo. Como en esta memoria sólo vamos a trabajar con $\wedge$-semiretículos, directamente nos referiremos a ellos como semiretículos. También vamos a asumir que todo semiretículo tiene último elemento 1. A partir de ahora, si no hay lugar a confusión, un semiretículo $(S, \wedge)$ será denotado directamente por S.

1.3. Filtros e Ideales

En esta sección vamos a revisar los principales resultados sobre filtros e ideales en semiretículos. Particularmente nos interesa repasar las nociones de filtro irreducible, primo e ideal de orden. Para más detalles ver [6] y [12].

Definición 1.9. Sea L un semiretículo. Un subconjunto no vacío $F \subseteq L$ es un *filtro* de L si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $x \in F$ y $x \leq y$, entonces $y \in F$.
2. Si $x, y \in F$, entonces $x \wedge y \in F$.

Un filtro F es propio si $F \neq L$.

Observemos que si F es un filtro propio, entonces existe un elemento $x \in F$, y como $x \leq 1$, entonces $1 \in F$.

Definición 1.10. Sea L un semiretículo. Un subconjunto no vacío $I \subseteq L$ es un *ideal* de L si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $y \in I$ y $x \leq y$, entonces $x \in I$.
2. Si $x, y \in I$, y existe el supremo $x \vee y$, entonces $x \vee y \in I$.

Un ideal I es propio si $I \neq L$.

Un filtro de un semiretículo es un subconjunto no vacío, creciente y cerrado bajo $\wedge$. Dualmente, un ideal es un subconjunto no vacío, decreciente y cerrado bajo los supremos existentes $\vee$. Simbolizaremos por $\mathrm{Fi}(L)$ e $\mathrm{Id}(L)$ a los conjuntos de los filtros y de los ideales de L respectivamente, ambos ordenados por medio de la relación de inclusión.

Observación 1.11. En un retículo la noción de ideal definida anteriormente coincide con la usual.

Definición 1.12. Sea L un semiretículo y H un subconjunto de L no vacío. El filtro generado por H es

$$[H) = \bigcap \{F : F \in \mathrm{Fi}(L) \text{ y } H \subseteq F\}.$$

El ideal generado por H es

$$(H] = \bigcap \{I : I \in \mathrm{Id}(L) \text{ y } H \subseteq I\}.$$

Definición 1.13. Un filtro F se dice que está finitamente generado si $F = [X)$, para algún subconjunto finito no vacío $X \subseteq L$. De manera análoga, un ideal I se dice que está finitamente generado si $I = (X]$, para algún subconjunto finito no vacío $X \subseteq L$.

Si $H = \{a\}$, entonces escribimos $[a)$ y $(a]$ y los llamaremos filtro principal generado por a e ideal principal generado por a, respectivamente.

Notemos que el filtro (ideal) generado por un subconjunto no vacío es el menor filtro (ideal) que contiene al conjunto. Ahora daremos una caracterización de los filtros generados por un conjunto válida tanto en semiretículos como en retículos. Una caracterización similar para ideales sólo es válida en el caso de retículos.

Proposición 1.14. *Sea L un semiretículo y H un subconjunto de L no vacío. Entonces:*

$$[H) = \{x \in L : \exists\{h_0, ..., h_n\} \subseteq H \ y \ (h_0 \wedge \cdots \wedge h_n \leq x)\}.$$

Si L es un retículo, entonces

$$(H] = \{x \in L : \exists\{h_0, ..., h_n\} \subseteq H \ y \ (x \leq h_0 \vee \cdots \vee h_n)\}.$$

Teorema 1.15. *Sea L un semiretículo con último elemento* 1. *Entonces:*

1. $\langle \mathrm{Fi}(L), \subseteq \rangle$ es un retículo completo donde las operaciones están definidas por:

$$\bigwedge_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} F_j$$
$$\bigvee_{j \in J} F_j = [\bigcup_{j \in J} F_j)$$

2. Si L es un retículo, entonces $\langle \mathrm{Id}(L), \subseteq \rangle$ es un retículo completo donde las operaciones están definidas por:

$$\bigwedge_{j \in J} I_j = \bigcap_{j \in J} I_j$$
$$\bigvee_{j \in J} I_j = (\bigcup_{j \in J} I_j]$$

Del resultado anterior obtenemos como caso particular que si $a, b \in L$, entonces

$$[a) \wedge [b) = [a \vee b), \text{ si existe } a \vee b$$
$$[a) \vee [b) = [a \wedge b)$$

y

$$(a] \wedge (b] = (a \wedge b]$$
$$(a] \vee (b] = (a \vee b], \text{ si existe } a \vee b.$$

En todo lo que sigue vamos a considerar que todo semiretículo tiene último elemento. Por lo tanto, tenemos que para cualquier par de elemntos $a, b \in L$, $[a) \cap [b) \neq \emptyset$, es decir, cualquier par de elementos tiene una cota superior.

Definición 1.16. Sea L un semiretículo. Sea F un filtro propio de L. Entonces

1. F es *irreducible* si para todo $F_1, F_2 \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $F = F_1 \cap F_2$, entonces $F = F_1$ o $F = F_2$. Es decir, F es irreducible si es un elemento irreducible en el semiretículo de los filtros $\mathrm{Fi}(L)$. Denotemos por $X(L)$ al conjunto de todos los filtros irreducibles de L.

2. F es *primo o débilmente irreducible* si para todo $F_1, F_2 \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $F_1 \cap F_2 \subseteq F$,entonces $F_1 \subseteq F$ o $F_2 \subseteq F$. Es decir, F es primo si es un elemento primo en el semiretículo de los filtros $\mathrm{Fi}(L)$. Denotaremos con $X_w(L)$ al conjunto de todos los filtros primos de L.

3. Un filtro propio F de L es *maximal* si para cada $K \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $F \subseteq K$, entonces $F = K$ o $K = L$.

   Denotaremos con $\mathrm{Ul}(L)$ el conjunto de los filtros maximales de L.

4. Un filtro de orden F es un subconjunto de L tal que:
   a) $F \neq \emptyset$ e $F \neq L$
   b) $\forall a \in L$ si $b \leq a$ y $b \in F$, entonces $a \in F$ (creciente)
   c) $\forall a, b \in F$, $\exists c \in F / c \leq a$ y $c \leq b$.

5. Un ideal de orden I es un subconjunto de L tal que:
   a) $I \neq \emptyset$ e $I \neq L$
   b) $\forall a \in L$ si $a \leq b$ y $b \in I$, entonces $a \in I$ (decreciente)
   c) $\forall a, b \in I$, $\exists c \in I / a \leq c$ y $b \leq c$.

Denotemos por $\mathrm{Fi}_{\mathrm{or}}(L)$ e $\mathrm{Id}_{\mathrm{or}}(L)$ a los conjuntos de todos los filtros e ideales de orden de L.

Definición 1.17. Sea L un semiretículo. Un ideal de orden propio I de L es *primo* si para cada $a, b \in L$ tal que $a \wedge b \in I$, entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Observación 1.18. Si L es un semiretículo, todo ideal de orden es un ideal.

Observación 1.19. En general, las nociones de filtro primo e irreducible no coinciden. Justamente una de las caracterizaciones de los semiretículos distributivo afirma que un semiretículo es distributivo cuando todo filtro primo es irreducible. Esto se demostrará en el Teorema 1.29 de la siguiente sección.

Lema 1.20. *Sea L un semiretículo. Entonces $X_w(L) \subseteq X(L)$, es decir, todo filtro primo es irreducible.*

Lema 1.21. *Sea L un semiretículo y sea $F \in \mathrm{Fi}(L)$. Entonces F es irreducible si y sólo si, para todo $a, b \notin F$, existen $c \notin F$ y $f \in F$ tal que $a \wedge f \leq c$ y $b \wedge f \leq c$.*

Lema 1.22. *Sea L un semiretículo y sea $F \subseteq L$. Entonces F es un filtro primo si y sólo si $F^c = \{x \in L : x \notin F\}$ es un ideal de orden primo.*

Vamos a dar ahora un teorema que es una generalización del teorema del filtro Primo para semiretículos que generaliza el resultado dado por G. Grätzer en [12]. Recordemos primero el siguiente resultado.

Lema 1.23 (de Zorn)**.** *Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(A)$. Supongamos que para toda cadena C en el conjunto ordenado $\langle \mathcal{F}, \subseteq \rangle$ se verifica que $\bigcup C \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal.*

Teorema 1.24 (del Filtro Irreducible)**.** *Sea L un semiretículo. Si $F \in \mathrm{Fi}(L)$ e $I \in \mathrm{Id_{or}}(L)$ tal que $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un filtro irreducible P tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Fi}(L) : F \subseteq H \text{ y } H \cap I = \emptyset\}.$$

Dado que $F \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Es claro que la unión de una cadena de elementos de $\mathcal{F}$, es un elemento de $\mathcal{F}$. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un filtro maximal P en $\mathcal{F}$. Tenemos que probar que $P \in \mathrm{Fi}(L)$.

Sean $a, b \notin P$ y consideremos los filtros

$$P_a = [P \cup \{a\}) \ y \ P_b = [P \cup \{b\}).$$

Entonces $P_a, P_b \notin \mathcal{F}$, lo cual implica que $P_a \cap I \neq \emptyset$ y $P_b \cap I \neq \emptyset$. Luego, existen $p_1, p_2 \in P$ y $x, y \in I$ tal que $p_1 \wedge a \leq x$ y $p_2 \wedge b \leq y$. Dado que I es un ideal de orden, entonces existe $c \in I$ tal que $c \notin P$, $x \leq c$ e $y \leq c$. Tomando $p = p_1 \wedge p_2$, tenemos que $p \wedge a \leq c$ y $p \wedge b \leq c$. Por Lema 1.21, concluimos que $P \in X(L)$. □

Corolario 1.25. *Sea L un semiretículo.*

1. Si $F \in \mathrm{Fi}(L)$ y $a \notin F$, entonces existe $P \in X(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $a \notin P$.
2. Si $a \nleq b$, entonces existe $P \in X(L)$ tal que $a \in P$ y $b \notin P$.
3. Todo filtro propio F es intersección de los filtros irreducibles que lo contienen.

1.4. Semiretículos distributivos

Es conocido que la propiedad de distributividad en retículos puede ser caracterizada de diversas formas. Cuando intentamos extrapolar estos resultados a estructuras más débiles, como los semiretículos algunas caracterizaciones dejan de ser equivalentes. Esto da lugar a la posibilidad de definir distintas clases de distributividad en semiretículos. Nos concentraremos en la noción de distributividad más estudiada y que aparece en otras estructuras algebraicas, como por ejemplo, los semiretículos implicativos.

Definición 1.26. Sea L un semiretículo. Diremos que L es *distributivo* si para todo $a, b_0, b_1 \in L$ tal que $b_0 \wedge b_1 \leq a$ entonces existen $a_0, a_1 \in L$ tal que $b_0 \leq a_0$, $b_1 \leq a_1$ y $a = a_0 \wedge a_1$.

El siguiente resultado relaciona la distributividad en semiretículos con la distributividad en retículos.

Lema 1.27. *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces para todo $a, b \in L$, existe un $d \in L$ tal que $a \leq d$ y $b \leq d$. Como consecuencia,* $\mathrm{Fi}(L)$ *es un retículo.*

Ahora mostraremos diferentes caracterizaciones de la noción de distributividad dada en la Definición 1.26. La mayoría de las caracterizaciones son generalizaciones de conocidos resultados sobre retículos distributivos. La primera caracterización que presentamos se debe G. Grätzer [12]. La segunda caracterización es en términos de filtros irreducibles y primos. Esta caracterización fue demostrada en [6].

A partir de ahora, L denotará un $\wedge$-semiretículo con último elemento 1.

Teorema 1.28. *Sea L un semiretículo. Entonces L es distributivo si y sólo si* $\mathrm{Fi}(L)$ *es un retículo distributivo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que L es distributivo, entonces por el Lema 1.27, $\mathrm{Fi}(L)$ es un retículo. Probemos que $\mathrm{Fi}(L)$ es distributivo. Sean $I, J, K \in \mathrm{Fi}(L)$. Veamos que

$$I \vee (J \cap K) = (I \vee J) \cap (I \vee K).$$

Sabemos que en todo retículo vale $I \vee (J \cap K) \subseteq (I \vee J) \cap (I \vee K)$. Probemos la otra inclusión.

Observemos que si $F, H \in \mathrm{Fi}(L)$, entonces $F \vee H = \{x = f \wedge h : f \in F \text{ y } h \in H\}$. En efecto, $x \in F \vee H$ si y sólo si existen $f \in F$ y $h \in H$ tal que $f \wedge h \leq x$, pero como L es distributivo, existen $f_1, h_1 \in S$ tal que $f \leq f_1$, $h \leq h_1$ y $x = f_1 \wedge h_1$,donde $f_1 \in F$ y $h_1 \in H$ por ser F y H filtros.

Ahora veamos que

$$(I \vee J) \cap (I \vee K) \subseteq I \vee (J \cap K).$$

Sea $a \in (I \vee J) \cap (I \vee K)$, entonces $a \in (I \vee J)$ y $a \in (I \vee K)$, es decir,

$$a = a_1 \wedge b_1 = a_2 \wedge b_2$$

donde $a_1, a_2 \in I$, $b_1 \in J$ y $b_2 \in K$. Como $a_1 \wedge b_1 \leq b_2$, por distributividad de S, tenemos que existen $a_1', b_1' \in S$ tal que $a_1 \leq a_1'$, $b_1 \leq b_1'$ y $b_2 = a_1' \wedge b_1'$. Además, al ser $b_1 \leq b_1'$ y J un filtro, se tiene que $b_1' \in J$. Con un razonamiento similar, com $a_1 \leq a_1'$, entonces $a_1' \in I$. También como $b_2 = a_1' \wedge b_1'$, entonces $b_2 \leq b_1'$ y por ser K un filtro se tiene que $b_1' \in K$. Por lo tanto $b_1' \in J \cap K$.

Como $a = a_2 \wedge b_2 = (a_2 \wedge a_1') \wedge b_1'$, donde $a_2 \wedge a_1' \in I$ y $b_1' \in J \cap K$, concluimos que $a \in I \vee (J \cap K)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathrm{Fi}(L)$ es un retículo distributivo. Sean $a, b_0, b_1 \in L$ tal que $b_0 \wedge b_1 \leq a$, entonces

$$\begin{aligned}[a) &= [a \vee (b_0 \wedge b_1)) \\ &= [a) \cap ([b_0) \vee [b_1)) \\ &= ([a) \cap [b_0)) \vee ([a) \cap [b_1)).\end{aligned}$$

Como $a \in ([a) \cap [b_0)) \vee ([a) \cap [b_1))$, entonces existen $a_0 \in [b_0)$ y $a_1 \in [b_1)$. Es decir tenemos que $b_0 \leq a_0$ y $b_1 \leq a_1$ tal que $a = a_0 \wedge a_1$ y por lo tanto L es distributivo. □

Teorema 1.29. *Sea L un semiretículo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *L es distributivo.*

2. *$X_w(L) = X(L)$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Por el Lema 1.20 tenemos que $X_w(L) \subseteq X(L)$. Nos queda por demostrar la otra inclusión. Sea $P \in X(L)$ y $F_1, F_2 \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $F_1 \cap F_2 \subseteq P$. Entonces, como $\mathrm{Fi}(L)$ es distributivo,

$$\begin{aligned}P &= (F_1 \cap F_2) \vee P \\ &= (F_1 \vee P) \cap (F_2 \vee P).\end{aligned}$$

Como $P \in X(L)$, entonces $P = F_1 \vee P$ o $P = F_2 \vee P$, lo cual implica que $F_1 \subseteq P$ o $F_2 \subseteq P$. Por lo tanto, $P \in X_w(L)$.

2. $\Rightarrow$ 1. Utilizando el Teorema 1.28, vamos a demostrar que el conjunto $\mathrm{Fi}(L)$, considerado como un retículo, es distributivo.

Sean $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{Fi}(L)$. Bastará probar que

$$F_1 \cap (F_2 \vee F_3) \subseteq (F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3).$$

Supongamos lo contrario. Entonces existe $a \in F_1 \cap (F_2 \vee F_3) - (F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3)$. Por el Corolario 1.25, existe $P \in X_w(L) = X(L)$ tal que $(F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3) \subseteq P$ y $a \notin P$, entonces $F_1 \cap F_2 \subseteq P$ y $F_1 \cap F_3 \subseteq P$. Por definición de filtro primo, tenemos que $F_1 \subseteq P$ o $F_2 \subseteq P$ y $F_1 \subseteq P$ o $F_3 \subseteq P$. Dado que $a \in F_1$ y $a \notin P$, entonces $F_2 \subseteq P$ y $F_3 \subseteq P$, es decir, $F_2 \vee F_3 \subseteq P$ y como consecuencia, se tiene que $a \in F_1 \cap (F_2 \vee F_3) \subseteq P$, lo cual es una contradicción. □

Si L es un semiretículo distributivo, entonces las nociones irreducible y primo coinciden. En consecuencia el Teorema 1.24 es verdadero para filtros primos. Por lo tanto el Teorema 1.24 se convierte en el famoso Teorema del Filtro Primo para retículos distributivos, o en el caso de álgebras de Boole, en el Teorema del ultrafiltro.

Teorema 1.30. *Sea L un semiretículo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *L es distributivo.*

2. *Si* $F \in \mathrm{Fi}(L)$ *e* $I \in \mathrm{Id}_{\mathrm{or}}(L)$ *tal que* $F \cap I = \emptyset$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$*.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como L es distributivo, tenemos que $X_w(L) = X(L)$ por el Teorema 1.29. Aplicando el Teorema 1.24, tenemos que existe $P \in X(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.

2. $\Rightarrow$ 1. Probemos que el retículo $\mathrm{Fi}(L)$ es distributivo. Sean $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{Fi}(L)$. Sabemos que $(F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3) \subseteq F_1 \cap (F_2 \vee F_3)$, así que bastará con que probemos que

$$F_1 \cap (F_2 \vee F_3) \subseteq (F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3).$$

Supongamos que $F_1 \cap (F_2 \vee F_3) \nsubseteq (F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3)$, entonces existe $a \in F_1 \cap (F_2 \vee F_3)$ tal que $a \notin (F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3)$. Tenemos entonces que

$$[(F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3)] \cap (a] = \emptyset.$$

Por hipótesis, existe un filtro primo P tal que

$$(F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3) \subseteq P \text{ y } P \cap (a] = \emptyset.$$

Entonces, $a \notin P$. Es claro que $F_1 \cap F_2 \subseteq P$ y $F_1 \cap F_3 \subseteq P$. Pero P es primo, luego tenemos que $F_1 \subseteq P$ o $F_2 \subseteq P$, y por el mismo razonamiento $F_1 \subseteq P$ o $F_3 \subseteq P$. Dado que $a \in F_1$ y $a \notin P$, tenemos que $F_1 \nsubseteq P$ y por lo tanto $F_2, F_3 \subseteq P$. Pero a su vez, como $F_2 \vee F_3 \subseteq P$ y $a \in F_2 \vee F_3 \subseteq P$, entonces $a \in P$, lo cual lleva a una contradicción.

Tenemos entonces que $(F_1 \cap F_2) \vee (F_1 \cap F_3) = F_1 \cap (F_2 \vee F_3)$, y el retículo $\mathrm{Fi}(L)$ es distributivo. Por el Teorema 1.28, concluimos que L es distributivo. $\square$

Resumimos en un teorema todas las caracterizaciones hasta aquí probadas.

Teorema 1.31. *Sea* L *un semiretículo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. L *es distributivo.*
2. $\mathrm{Fi}(L)$ *es un retículo distributivo.*
3. $X_w(L) = X(L)$*.*
4. *Si* $F \in \mathrm{Fi}(L)$ *e* $I \in \mathrm{Id}_{\mathrm{or}}(L)$ *tal que* $F \cap I = \emptyset$*, entonces existe un filtro primo* P *tal que* $F \subseteq P$ *y* $P \cap I = \emptyset$*.*

Las equivalencias entre las condiciones (1) y (4) del Teorema 1.31 fueron demostradas por J. Varlet en [21]. La equivalencia entre (1) y (2) fue probada por G. Grätzer [12]. Por último, las equivalencias entre (1) y (3) fueron demostradas por S. Celani en [6].

1.5. Filtros e ideales de Frink

En esta sección vamos a definir un nuevo tipo de filtro e ideal que serán de suma importancia en la dualidad tipo Priestley para los semiretículos distributivos. Estas nuevas nociones dependen únicamente de una estructura de orden, no de la posible existencia de ínfimos o supremos. Para denotar que X es un subconjunto finito de un conjunto A escribiremos $X \subseteq_f A$.

Las siguientes definiciones fueron dadas por O. Frink en su artículo [11]. El motivo principal de Frink es dar algún tipo de extensión de las nociones de filtro e ideal en conjuntos ordenados.

Definición 1.32. Sea P un conjunto ordenado.

- Un subconjunto F de P es un *filtro de Frink* si y sólo si para todo $X \subseteq_f F$ y para todo $a \in P$ si
$$\bigcap \{(x] : x \in X\} \subseteq (a] \text{, entonces } a \in F.$$
- Un subconjunto I de P es un *ideal de Frink* si y sólo si para todo $X \subseteq_f I$ y para todo $a \in P$ si
$$\bigcap \{[x) : x \in X\} \subseteq [a) \text{, entonces } a \in I.$$

Denotaremos al conjunto de filtros de Frink como $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ y al conjunto de ideales de Frink como $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$.

Una de las limitaciones del conjunto de ideales (filtros) de orden es que no forman un sistema de clausura y en consecuencia se pierden importantes propiedades, como por ejemplo no contar con una noción de ideal (filtro) de orden generado. A pesar de esto la noción de ideal (filtro) de orden es necesaria para desarrollar una representación topológica tipo espectral para semiretículos distributivos, como hemos visto anteriormente.

En contraposición con las nociones de filtro e ideal de orden, los conceptos de filtros e ideales de Frink si producen sistemas de clausura y además existen descripciones de filtros e ideales de Frink generados por un conjunto.

Proposición 1.33. *[11] Sea P un conjunto ordenado. Entonces $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ e $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$ son sistemas de clausura.*

Es sencillo demostrar que si $F \in \mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$, entonces F es creciente. Similarmente, si $I \in \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$, entonces I es decreciente.

En el siguiente resultado vemos cual es la relación con las nuevas nociones introducidas.

Lema 1.34. *Sea P un conjunto ordenado. Entonces $\mathrm{Id}_{\mathrm{or}}(P) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$ y $\mathrm{Fi}_{\mathrm{or}}(P) \subseteq \mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$.*

Demostración. Sea $I \in \mathrm{Id}_{\mathrm{or}}(P)$ y sean $a_1, \ldots, a_n \in I$ tal que $[a_1) \cap \cdots \cap [a_n) \subseteq [a)$.

Probaremos que $a \in I$.

Cómo I es un ideal de orden, existe $c \in I$ tal que $a_i \leq c$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces $c \in [a_i)$ para cada $1 \leq i \leq n$. De esta manera $c \in [a_1) \cap \cdots \cap [a_n) \subseteq [a)$ y en consecuencia $c \in [a)$, luego $a \leq c$. Como $c \in I$ e I es decreciente tenemos que $a \in I$. Por lo tanto $I \in \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$.

De forma análoga se puede probar que $\mathrm{Fi}_{\mathrm{or}}(P) \subseteq \mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$. $\square$

El siguiente resultado afirma que los ideales de Frink y los filtros de Frink coinciden con las nociones usuales en semiretículos, y por lo tanto en retículos. Más precisamente.

Lema 1.35. *Si $\langle L, \wedge \rangle$ un ínfimo semiretículo. Entonces $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(L) - \{\emptyset\} = \mathrm{Fi}(L)$.*

Si $\langle L, \vee \rangle$ un supremo semiretículo. Entonces $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(L) - \{\emptyset\} = \mathrm{Id}(L)$.

Sabemos que en un ínfimo semiretículo las nociones de filtro de orden y filtro de Frink coinciden. En el próximo lema es una especie de recíproca de esto. La demostración queda como ejercicio para el lector.

Proposición 1.36. *Sea P un conjunto ordenado con último elemento. Entonces* $\mathrm{Fi}_{\mathrm{or}}(P) = \mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ *si y sólo si P es un ínfimo semiretículo.*

Demostración. Ver [11]. □

Sea P un conjunto ordenado. Por la proposición 1.33 las familias $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ e $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$ son sistemas de clausura. En consecuencia son retículos completos. Podemos entonces considerar los operadores de clausura asociados y definir el filtro e ideal de Frink generado por un subconjunto $X \subseteq P$. En tal caso vamos a denotar por $\mathrm{F}_{\mathrm{F}}(X)$ y $I_F(X)$ al filtro y al ideal de Frink generado por un conjunto X, respectivamente. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces el ideal y el filtro finitamente generados serán denotados por $\mathrm{I}_{\mathrm{F}}(x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathrm{F}_{\mathrm{F}}(x_1, \ldots, x_n)$, respectivamente. Debido a que $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ e $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$ son retículos completos, entonces el supremo y el ínfimo en $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$ están dados por:

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F} \text{ y } \bigvee \mathcal{F} = \mathrm{F}_{\mathrm{F}}(\bigcup \mathcal{F}),$$

para cualquier subfamilia $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Fi}_{\mathrm{F}}(P)$. Similarmente, el supremo y el ínfimo en $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$ están definidos por:

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I} \text{ y } \bigvee \mathcal{F} = \mathrm{I}_{\mathrm{F}}(\bigcup \mathcal{I}),$$

para cualquier subfamilia $\mathcal{I}$ de $\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}(P)$.

Ahora vamos a dar una útil caracterización de los ideales y filtros de Frink generados por un conjunto. La demostración es inmediata.

Teorema 1.37. *Sea P un conjunto ordenado. Sea $X \subseteq P$. Entonces*

$$\mathrm{I}_{\mathrm{F}}(X) = \{a : \exists \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X : [x_1) \cap \cdots \cap [x_n) \subseteq [a)\}$$

y

$$\mathrm{F}_{\mathrm{F}}(X) = \{a : \exists \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X : (x_1] \cap \cdots \cap (x_n] \subseteq (a]\}.$$

1.6. Filtros optimales

Ahora estamos interesados en introducir y estudiar la noción de filtro optimal en un conjunto ordenado. Los filtros optimales juegan un papel fundamental en el desarrollo de la teoría de representación por medio de espacios de Priestley de los semiretículos distributivos acotados y de los semiretículos implicativos acotados, como veremos más adelante.

Definición 1.38. Sea P un conjunto ordenado. Un filtro de Frink propio F se dice *optimal* si su complemento F^c es un ideal de Frink.

Vamos a denotar con $Opt(P)$ el conjunto ordenado de los filtros optimales de un conjunto ordenado P. A continuación damos distintas caracterizaciones de la noción de filtro optimal que serán de utilidad más adelante. La demostración es una simple aplicación de la definición y de conocidos conceptos en conjuntos ordenados.

Lema 1.39. *Sea P un conjunto ordenado. Sea F un filtro de Frink propio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *F es optimal.*
2. *si $a_1, \ldots a_n \notin F$ y $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [a)$, entonces $a \notin F$.*
3. *Si $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [a)$ y $a \notin F$, entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $a_i \notin F$.*

De ahora en más vamos a considerar semiretículos distributivos acotados. En el próximo resultado vamos a dar un teorema tipo filtro primo. Este teorema permite separar filtros con ideales de Frink por medio de filtros optimales. Observemos su parecido con el Teorema del Filtro Irreducible 1.24. Pero obervemos que el caso del teorema del Filtro irreducible necesitamos la noción de ideal de orden. En en próximo teorema se necesita la noción de ideal de Frink.

Teorema 1.40 (del Filtro Optimal)**.** *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Sea $F \in \mathrm{Fi}(L)$ e $I \in \mathrm{Id_F}(L)$. Si $F \cap I = \emptyset$, entonces existe $P \in Opt(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*

Demostración. Sea $F \in \mathrm{Fi}(L)$ e $I \in \mathrm{Id_F}(L)$ tal que $F \cap I = \emptyset$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{H \in \mathrm{Fi}(L) : F \subseteq H \text{ y } H \cap I = \emptyset\}.$$

Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y toda cadena de elementos de $\mathcal{F}$ está en $\mathcal{F}$, entonces podemos aplicar el lema de Zorn. Luego existe un elemento maximal P en $\mathcal{F}$. Comprobemos que este filtro es optimal. Supongamos que existen $a_1, \ldots a_n \notin P$ y $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [a)$, pero $a \in P$. Consideremos los filtros $F_{a_i} = F(P \cup \{a_i\})$. Entonces $F_{a_i} \notin \mathcal{F}$. Luego para cada $1 \leq i \leq n$ existen $f_i \in F_{a_i}$ y $x_i \in I$ tales que $f_i \wedge a_i \leq x_i$. Sea $f = \bigwedge f_i$. Entonces $f \wedge a_i \leq x_i$. Luego

$$\begin{aligned} \bigcap [x_i) &\subseteq \bigcap [f \wedge a_i) = \bigcap ([f) \veebar [a_i)) = [f) \veebar \bigcap [a_i) \\ &\subseteq [f) \veebar [a) = [f \wedge a). \end{aligned}$$

La notación $\veebar$ indica el supremo entre los filtros principales. Como $x_i \in I$, $\bigcap [x_i) \subseteq [f \wedge a)$ e I es un ideal de Frink, entonces $f \wedge a \in I$, lo que es un absurdo. Por lo tanto, P es optimal. $\square$

Teorema 1.41. *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces*

1. *Todo filtro primo es optimal, es decir, $X(L) \subseteq Opt(L)$.*
2. *Para cada $P \in Opt(L)$ existe un $Q \in X(L)$ tal que $P \subseteq Q$, es decir, $(X(L)] = Opt(L)$.*

3. *Todo filtro es intersección de filtros optimales.*

Demostración. (1) Sea P un filtro primo. Sean $a_1, \ldots a_n \notin P$ y supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [a)$. Si $a \in P$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq P$, y al ser P primo, $a_i \in P$ para algún $1 \leq i \leq n$, lo que es imposible. Por lo tanto P es optimal.

(2) Sea P optimal. Como P es propio, existe un $a \in L$ tal que $a \notin P$. Entonces $P \cap (a] = \emptyset$. Por el Teorema del Filtro Primo, existe un filtro primo Q tal que $P \subseteq Q$ y $a \notin Q$.

(3) Es inmediato. $\square$

Observación 1.42. Si L es un retículo distributivo, entonces la noción de filtro primo, filtro irreducible y filtro optimal coinciden.

2 Representación tipo Stone

En esta sección vamos a recordar la representación de semiretículos distributivos los $DS-$espacios como una generalización de los espacios espectrales definidos por M. Stone [19]. Recordemos que de acuerdo a la dualidad desarrollada por Stone todo retículo distributivo es representable por medio de un espacio espectral. Los resultados que se presentarán en esta sección están desarrollados en detalle en [6], y particularmente en [8].

2.1. Preliminares

Vamos a introducir ahora, las definiciones y resultados necesarios que utilizaremos en el resto del capítulo. Comenzamos recordando algunas nociones topológicas básicas.

Definición 2.1. Un **espacio topológico** es un par (X, τ), donde X es un conjunto no vacío y τ es una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en τ,
2. La unión arbitraria de elementos de τ está en τ,
3. La intersección finita de elementos de τ está en τ.

Definición 2.2. Sea X un conjunto. Una **base** para una topología sobre X es una colección τ de subconjuntos de X, llamados elementos básicos, tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe $O \in \tau$ tal que $x \in O$,
2. Si $x \in O_1 \cap O_2$, donde $O_1, O_2 \in \tau$, entonces existe $O_3 \in \tau$ tal que $x \in O_3 \subseteq O_1 \cap O_2$.

Definición 2.3. Sea X un conjunto. Una **subbase** Γ para una topología τ sobre X es una colección de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{O_i \in \Gamma} O_i$.

La siguiente definición nos será de gran utilidad.

Definición 2.4. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. Una subfamilia $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dirá **dualmente dirigida**, si para todo $U, V \in A$, existe $W \in A$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

De ahora en más, L denotará un $\wedge$-semiretículo con último elemento 1. Recordemos que si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, entonces la terna $(\mathcal{P}_c(X), \cap, X)$ es un semiretículo, donde $\mathcal{P}_c(X)$ denota al conjunto de todos los subconjuntos crecientes de X.

Definición 2.5. [8] Sea X un espacio topológico y sea K una base de abiertos-compactos de X. Diremos que X es *sober* si satisface las siguientes condiciones:

- X es T_0,
- Para cada subconjunto cerrado Y y cada subfamilia dualmente dirigida $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, para todo $U_i \in A$, entonces $Y \cap \bigcap\{U_i : U_i \in A\} \neq \emptyset$.

Veremos a continuación que ciertas bases de un espacio topológico generan un semiretículo distributivo.

Sea X un espacio topológico y sea K una base de abiertos-compactos de X. Consideremos la familia

$$S_K(X) = \{U : U^c \in K\}.$$

Teorema 2.6. *Sea X un espacio topológico y K una base de abiertos-compactos de X cerrada bajo uniones finitas. Entonces*

$$\langle S_K(X), \cap, X\rangle$$

es un semiretículo distributivo con último elemento X.

Demostración. Es claro que $S_K(X)$ es un semiretículo pues K está cerrada bajo uniones finitas. Sean $U, V, W \in K$ tal que $W \subseteq U \cup V$. Vamos a probar que existen $U', V' \in K$ tal que $W = U' \cup V'$, $U' \subseteq U$ y $V' \subseteq V$. Por complementación obtendremos que $S_K(X)$ es distributivo. Como $W = (W \cap U) \cup (W \cap V)$ y los conjuntos $W \cap U$ y $W \cap V$ son abiertos y K es una base, entonces existen subfamilias $\{U_i : i \in I\}$ y $\{V_j : j \in J\}$ de elementos de K tales que

$$W = (W \cap U) \cup (W \cap V) = \bigcup \{U_i : i \in I\} \cup \bigcup \{V_j : j \in J\}.$$

Como W es compacto, existen $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m$ tales que $W = U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup V_1 \cup \cdots \cup V_m$. Como K es cerrado bajo uniones finitas, entonces $U_1 \cup \cdots \cup U_n = U'$, y $V_1 \cup \cdots \cup V_m = V' \in K$. Es claro que $U' \subseteq W \cap U \subseteq U$ y $V' \subseteq W \cap V \subseteq V$. Por lo tanto, por complementación obtenemos que $S_K(X)$ es distributivo. □

El teorema anterior será utilizado más adelante en la representación topológica de los semiretículos distributivos.

2.2. Representación por conjuntos

Sea L un semiretículo distributivo. Consideremos el conjunto ordenado $X(L)$ y consideremos también la aplicación

$$\varphi : L \to \mathcal{P}_c(X(L))$$

definida por

$$\varphi(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}.$$

Ahora veremos que todo semiretículo es isomorfo a un sub semiretículo de cierto retículo distributivo de conjuntos.

Teorema 2.7 (de Representación)**.** *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces L es isomorfo a la subálgebra $\varphi[L] = \{\varphi(a) : a \in L\}$ de $\mathcal{P}_c(X(L))$.*

Demostración. Sea $a \in L$. Primero veamos que $\varphi(a) \in \mathcal{P}_c(X(L))$. Sea $P \in \varphi(a)$ y $P \subseteq Q$. Como $P \in \varphi(a)$, entonces $a \in P$, pero entonces $a \in Q$, es decir, $Q \in \varphi(a)$. Tenemos que $\varphi(a) \in \mathcal{P}_c(X(L))$.

Probemos ahora que $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$ y que $\varphi(1) = X(L)$. Sea $P \in \varphi(a \wedge b)$, entonces $a \wedge b \in P$. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, se tiene que $a, b \in P$, es decir, $P \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$. Recíprocamente, si $P \in \varphi(a) \cap \varphi(b)$, entonces $a \in P$ y $b \in P$. Como $a \wedge b \in P$, se tiene que $P \in \varphi(a \wedge b)$. Claramente $\varphi(1) \subseteq X(L)$. Sea $P \in X(L)$ y sea $a \in P$, entonces $a \leq 1$, es decir, $1 \in P$ y $P \in \varphi(1)$.

Nos falta demostrar por último que la aplicación φ es inyectiva. Sean $a, b \in L$ tal que $a \neq b$. Veamos que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Como $a \neq b$, entonces $a \nleq b$ o $b \nleq a$. Si $a \nleq b$ entonces $[a) \cap (b] = \emptyset$. Por Teorema 1.24, tenemos que existe $P \in X(L)$ tal que $[a) \subseteq P$ y $P \cap (b] = \emptyset$, entonces $a \in P$ y $b \notin P$, es decir, $P \in \varphi(a)$ y $P \notin \varphi(b)$. Si $b \nleq a$ se razona de manera análoga. Por lo tanto φ es inyectiva y $L \cong \varphi[L]$. □

2.3. DS-espacios

El teorema de representación 2.7 es la herramienta esencial para demostrar la representación por conjuntos que estudiaremos en esta sección. La idea es definir un espacio topológico sobre el conjunto de los filtros primos $X(L)$ de un semiretículo L. El espacio topológico asociado se genera por medio de una base, que como veremos, la base adecuada será la familia de conjuntos $\varphi[L]^c = \{\varphi(a)^c = X(L) - \varphi(a) : a \in L\}$.

Proposición 2.8. *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces:*

1. $X(L) = \bigcup\{\varphi(a)^c : a \in L\}$,
2. *Para todo $a, b \in L$ y para todo $P \in X(L)$ tal que $P \in \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$, existe un $c \in L$ tal que $P \in \varphi(c)^c \subseteq \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$,*
3. *Para todo $a \in L$ y para todo $B \subseteq L$, si*
$$\varphi(a) = \bigcap\{\varphi(b) : b \in B\},$$
entonces existe un subconjunto finito $B_0 \subseteq B$ tal que
$$\varphi(a) = \bigcap\{\varphi(b) : b \in B_0\}.$$

Demostración. 1. Sea $a \in L$. Tomemos $P \in \varphi(a)^c$, entonces $P \in X(L)$ y $\varphi(a)^c \subseteq X(L)$. Por lo tanto $\bigcup\{\varphi(a)^c : a \in L\} \subseteq X(L)$. Veamos la otra inclusión. Sea $P \in X(L)$. Como P es propio, entonces existe $a \in L$ tal que $a \notin P$, es decir, $P \notin \varphi(a)$, o lo que es equivalente a decir que $P \in \varphi(a)^c$. Hemos demostrado que $X(L) = \bigcup\{\varphi(a)^c : a \in L\}$.

2. Sean $a, b \in L$ y $P \in X(L)$ tal que $P \in \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$. Como

$$P \in (X(L) - \varphi(a)) \cap (X(L) - \varphi(b))$$

entonces $a, b \notin P$ y por hipótesis, $P \in X(L) = X_w(L)$. Como $a, b \in P^c$ y $P^c \in \mathrm{Ido}(L)$, entonces existe $c \in P^c$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$, es decir, $P \in \varphi(c)^c$. Nos resta probar que $\varphi(c)^c \subseteq \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$. Sea $Q \in \varphi(c)^c$, entonces $c \notin Q$ y $a, b \notin Q$, pues si $a \in Q$, como $a \leq c$ y Q es filtro, entonces $c \in Q$, lo cual es una contradicción. Entonces $Q \notin \varphi(a)$ y $Q \notin \varphi(b)$, es decir $Q \in \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$. Por lo tanto $P \in \varphi(c)^c \subseteq \varphi(a)^c \cap \varphi(b)^c$.

3. Sea $a \in L$ y $B \subseteq L$ tal que $\varphi(a) = \bigcap\{\varphi(b) : b \in B\}$. Sea $[B)$ el filtro generado por B. Entonces $a \in [B)$, pues en caso contrario, $[B) \cap (a] = \emptyset$ y por Teorema 1.24 tenemos que existe $P \in X(L)$ tal que $[B) \subseteq P$ y $a \notin P$. Pero esto implica que $P \in \bigcap\{\varphi(b) : b \in B\}$ y $P \notin \varphi(a)$, lo cual es una contradicción. Entonces como $a \in [B)$, tenemos que existe $B_0 = \{b_1, .., b_n\} \subseteq B$ tal que $b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \leq a$ y

$$\varphi(b_1 \wedge \cdots \wedge b_n) = \varphi(b_1) \cap \cdots \cap \varphi(b_n) \subseteq \varphi(a).$$

Por lo tanto $\bigcap\{\varphi(b) : b \in B_0\} \subseteq \varphi(a)$. La inclusión $\varphi(a) \subseteq \varphi(b_1) \cap \cdots \cap \varphi(b_n)$ es inmediata. Tenemos entonces que $\varphi(a) = \varphi(b_1) \cap \cdots \cap \varphi(b_n)$, es decir, $\varphi(a) = \bigcap\{\varphi(b) : b \in B_0\}$. □

Dado un semiretículo distributivo L, por el punto 1 de la Proposición 2.8, tenemos que la familia

$$\varphi[L]^c = \{\varphi(a)^c = X(L) - \varphi(a) : a \in L\}$$

es una subbase para una topología definida sobre $X(L)$. Por el inciso (2), tenemos que $\varphi[L]^c$ es una base para una topología τ sobre $X(L)$. Entonces la estructura

$$\langle X(L), \tau \rangle$$

es un espacio topológico, donde $\varphi[L]^c$ es una base para la topología τ. Este espacio será llamado el **espacio dual** de L, o el espacio espectral asociado a L. Esta clase de espacios son una generalización de los espacios que Marshall Stone estudió en relación con los retículos distributivos. Por eso este tipo de espacios también se los suele llamar espacios tipo Stone o espacios tipo espectrales.

En la próxima proposición vamos a caracterizar a los conjuntos abiertos, los abiertos y compactos y vamos a demostrar una propiedad fundamental que nos permitirá definir a los DS-espacios.

Proposición 2.9. *Sea L un semiretículo distributivo y sea $\langle X(L), \tau \rangle$ el espacio dual de L. Entonces:*

1. *Un subconjunto propio $U \subseteq X(L)$ es abierto en $\langle X(L), \tau \rangle$ si y sólo si existe un filtro F de L tal que $U = \varphi(F)^c$, donde*

$$\varphi(F) = \{P \in X(L) : F \subseteq P\}.$$

2. *Un subconjunto propio $U \subseteq X(L)$ es un abierto-compacto en $\langle X(L), \tau \rangle$ si y sólo si existe $a \in L$ tal que $U = \varphi(a)^c$,*

3. *Sea Y un subconjunto cerrado en $\langle X(L), \tau\rangle$, y sea $A \subseteq X(L)$ una subfamilia dualmente dirigida de subconjuntos abiertos-compactos tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, para todo $U_i \in A$, entonces $Y \cap \bigcap\{U_i : U_i \in A\} \neq \emptyset$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$) Sea U un subconjunto abierto de $\langle X(L), \tau\rangle$. Dado que $\varphi(L)^c$ es una base del espacio $\langle X(L), \tau\rangle$, se tiene que

$$U = \bigcup\{\varphi(a)^c : a \in B \subseteq L\}.$$

Consideremos $F = [B)$ el filtro generado por B. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\varphi(F)^c &= \{\varphi(a)^c : a \in F\}\\ &= \bigcup_{a \in B.} \{\varphi(a)^c : a \in B\}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $U = \varphi(F)^c$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, es inmediato chequear que si F es un filtro de L, entonces

$$\varphi(F) = \bigcap\{\varphi(a) : a \in F\}.$$

Por lo tanto tenemos que $\varphi(F)^c$ es un abierto en L.

2. $\Rightarrow$) Sea U un abierto-compacto en $\langle X(L), \tau\rangle$ Por el inciso 1 tenemos que

$$U = \varphi(F)^c = \bigcup\{\varphi(a)^c : a \in F\}.$$

para algún filtro F de L. Dado que U es compacto, existen $\{a_1, .., a_n\} \subseteq F$ tal que

$$\begin{aligned}U &= \varphi(a_1)^c \cup \cdots \cup \varphi(a_n)^c\\ &= (\varphi(a_1) \cap \cdots \cap \varphi(a_n))^c\\ &= \varphi(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n)^c.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sea $U \subseteq X(L)$ y supongamos que existe $a \in L$ tal que $U = \varphi(a)^c$. Entonces U es abierto, y por el inciso 3 de la Proposición 2.8, también tenemos que U es compacto.

3. Sea Y un subconjunto cerrado en $\langle X(L), \tau\rangle$ y sea $K = \{U_i : i \in I\}$ una familia dualmente dirigida de subconjuntos abiertos-compactos de $\langle X(L), \tau\rangle$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, para todo $i \in I$.

Por inciso 2, para cada $i \in I$, existe L tal que $U_i = \varphi(a_i)^c$. Consideremos el conjunto

$$H = \{a_i \in L : U_i = \varphi(a_i)^c\}$$

y consideremos el ideal generado por H, es decir

$$(H] = \{x \in L : x \leq c, \text{ para algún } c \in H\}.$$

Probemos que $(H]$ es un ideal de orden en A. Sean $a, b \in (H]$, entonces existen $c_1, c_2 \in H$ tal que $a \leq c_1$ y $b \leq c_{2.}$ Dado que $\varphi(c_1)^c, \varphi(c_2)^c \in K$, entonces por ser K dualmente dirigida, existe un $c \in H$ tal que

$$\varphi(c)^c \subseteq \varphi(c_1)^c \cap \varphi(c_2)^c$$

es decir

$$\varphi(c_1) \cup \varphi(c_2) \subseteq \varphi(c)$$

entonces $a \leq c$ y $b \leq c$. Por lo tanto $(H] \in \mathrm{Ido}(L)$.

Como Y es cerrado, usando el inciso 1, tenemos que existe $F \in \mathrm{Fi}(L)$ tal que $Y = \varphi(F)$. Probemos que $F \cap (H] = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Entonces existe $a \in F$ y $c \in H$ tal que $a \leq c$. Por hipótesis, $\varphi(F) \cap \varphi(c) \neq \emptyset$, entonces existe $P \in X(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $c \notin P$. Pero dado que $a \in F$ y $a \in P$, como consecuencia se tiene que $c \in P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $F \cap (H] = \emptyset$. Por Teorema 1.24, existe $P \in X(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap (H] = \emptyset$. Luego, $P \in \varphi(F) = Y$ y $P \in \bigcap\{U_i : i \in I\}$, es decir,

$$Y \cap \bigcap\{U_i : i \in I\} \neq \emptyset.$$

De esta forma la proposición queda demostrada. □

Las propiedades probadas anteriormente para el espacio $(X(L), \tau)$ motiva introducir una definición abstracta de los espacios asociados a los semiretículos distributivos.

Ahora definiremos los espacios topológicos, tipo Stone, duales de los semiretículos distributivos.

Si X es un espacio topológico, escribiremos con $KO(X)$ a la familia de todos los subconjuntos de X que son abiertos y compactos. Notemos que

- Si $U, V \in KO(X)$, entonces $U \cup V \in KO(X)$,
- $\emptyset \in KO(X)$.
- Cuando el espacio es compacto, entonces $X \in KO(X)$.

Definición 2.10. [8] Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un **DS-espacio** si es un espacio sober y el conjunto de todos los abiertos-compactos $KO(X)$ forman una base para la topología.

De acuerdo al Teorema 2.6, si X es un DS-espacio, como $KO(X)$ es un base, la familia $S_{KO(X)}(X) = \{U : X - U \in KO(X)\}$ es un semiretículo distributivo bajo la operación de intersección de conjuntos. Si además el espacio X es compacto, entonces $S_{KO(X)}(X)$ tiene primer elemento $\emptyset$.

Para simplificar la notación escribiremos $S(X)$ en vez de $S_{KO(X)}(X)$.

Por claridad formulamos el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sea (X, τ) un DS-espacio. Entonces*

$$(S(X), \cap, X)$$

es un semiretículo distributivo. Si X es compacto, entonces $(S(X), \cap, \emptyset, X)$ es un semiretículo distributivo con primer elemento $\emptyset$.

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 2.6. □

Teorema 2.12. *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces*

$$(X(L), \tau),$$

donde la topología τ es generada tomando como base la familia $\varphi[L]^c = \{\varphi(a)^c : a \in L\}$, es un DS-espacio y la aplicación $\varphi : L \to \varphi[L]$ es un isomorfismo.

Demostración. Por la Proposición 2.9, tenemos que $(X(L), \tau)$ es un DS-espacio donde el conjunto de todos los abiertos y compactos coincide con la familia $\varphi[L]^c = \{\varphi(a)^c : a \in L\}$. Por el Teorema 2.7 la aplicación φ es un isomorfismo de semiretículos. □

Resumiendo lo anterior tenemos que:

1. Si L es un semiretículo distributivo, entonces $X(L) = (X(L), \tau)$ es un DS-espacio.

   Si además L tiene primer elemento 0, entonces el espacio $X(L)$ es compacto.

2. Si X es un DS -espacio, entonces $S(X) = (S(X), \cap, X)$ es un semiretículo distributivo.

   Si el espacio X es compacto, entonces $S(X)$ tiene primer elemento $\emptyset$.

Además de los puntos anteriores, también se puede demostrar lo siguiente:

- Si L es un semiretículo distributivo, entonces L es isomorfo al semiretículo distributivo $S(XL))$ asociado al DS-espacio $(X(L), \tau)$ por medio de la aplicación φ.

- Si X es un DS-espacio, entonces X es homeomorfo al DS-espacio $X(S(X))$ asociado al semiretículo distributivo $S(X)$ por medio de la aplicación $\varepsilon : X \to X(S(X))$ definida por $\varepsilon(x) = \{U \in S(X) : x \in U\}$.

Los ítems anteriores son necesarios para completar la dualidad entre los semiretículos distributivos y los DS-espacios. No hacemos aquí los detalles pues el objetivo no es demostrar esta dualidad, sino estudiar la dualidad con los espacios de Priestley generalizados. Los detalles de las pruebas de todo esto se puede encontrar en los artículos [6] y [7].

3 Dualidad tipo Priestley

En este capítulo vamos a estudiar la dualidad desarrollada por Guram Bezhanishvili y Ramón Jansana en los artículos [2, 3, 4] para los semiretículos distributivos acotados. Esta dualidad es una extensión de la conocida dualidad para retículos distributivos debida a Hilary Priestley [17] y [18].

La idea fundamental se basa en que todo semiretículo distributivo acotado se lo puede sumergir en un retículo distributivo (la extensión distributiva libre) y que el espacio de Priestley de dicho retículo permite recuperar el semiretículo cuando se lo dota de ciertas restricciones, como por ejemplo fijar en el espacio un subconjunto de filtros que corresponden a los filtros primos del semiretículo. Este subconjunto, junto con otras propiedades, permite recuperar el semiretículo.

3.1. Espacios de Priestley

En esta sección vamos a recordar la dualidad de Priestley para retículos distributivos acotados. Daremos la noción de espacio de Priestley y veremos que tiene asociado un retículo distributivo. También veremos que todo retículo distributivo acotado tiene asociado un espacio de Priestley.

Definición 3.1. Un espacio topológico ordenado es un triple $\langle X, \leq, \tau\rangle$ donde X es un conjunto, $\leq$ es un orden parcial y τ una topología de X.

Un espacio topológico ordenado $\langle X, \leq, \tau\rangle$ es *totalmente disconexo* en el orden si para cada $x, y \in X$ tales que $x \nleq y$ existe un conjunto $U \subseteq X$ abierto-cerrado y creciente tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Un conjunto abierto-cerrado también es conocido como conjunto clopen. De aquí en adelante usaremos esta denominación.

Definición 3.2. Un *espacio de Priestley* es un espacio topológico ordenado totalmente disconexo en el orden que es compacto.

Sea $\langle X, \leq, \tau\rangle$ un espacio de Priestley. Por un lado, denotaremos al conjunto de los cerrados (abiertos) crecientes por $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(X)$ ($\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(X)$). Y al conjunto de los cerrados (abiertos) decrecientes por $\mathcal{C}_d(X)$ ($\mathcal{O}_d(X)$). Por otro lado, al conjunto de clopen crecientes lo denotaremos por $D(X)$. Y al conjunto de clopen decrecientes lo denotaremos por $D(X)^c$.

Observación. Notemos que

$$\langle D(X), \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$$

y

$$\langle D(X)^c, \cup, \cap, \emptyset, X\rangle$$

forman retículos distributivos acotados.

El retículo distributivo acotado $D(X)$ se dirá el dual del espacio $\langle X, \leq, \tau\rangle$.

Proposición 3.3. *Sea un espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau\rangle$, entonces la colección*

$$D(X) \cup D(X)^c$$

es una subbase para la topología τ.

Demostración. Sea O un abierto del espacio tal que $O \neq \emptyset, X$. Para cada $x \in O$ vamos a encontrar dos clopen crecientes U_x y V_x tales que $x \in U_x \cap V_x^c \subseteq O$. De este modo

$$O = \bigcup_{x \in O} U_x \cap V_x^c$$

por lo que obtendremos lo deseado. Sea $x \in O$, consideremos los conjuntos

$$I = \{y \notin O : x \nleq y\} \text{ y } J = \{y \notin O : y \nleq x\}.$$

Para cada $y \in I$ sea U_y un clopen creciente tal que $x \in U_y$ pero $y \notin U_y$, y para $y \in J$ sea V_y un clopen creciente tal que $y \in V_y$ pero $x \notin V_y$. Así

$$O^c \subseteq \bigcup_{y \in I} U_y^c \cup \bigcup_{y \in J} V_y.$$

Puesto que O^c es cerrado y el espacio es compacto, es un subconjunto compacto. Por lo tanto, existen $I' \subseteq I$ y $J' \subseteq J$ finitos tales que

$$O^c \subseteq \bigcup_{y \in I'} U_y^c \cup \bigcup_{y \in J'} V_y.$$

Sean $U_x = \bigcap_{y \in I'} U_y$ y $V_x = \bigcup_{y \in J'} V_y$. Así, $x \in U_x$ y $x \notin V_x$. Además $O^c \subseteq U_x^c \cup V_x$ y en consecuencia $x \in U_x \cap V_x^c \subseteq O$ □

Observación. De la proposición anterior se sigue que en todo espacio de Priestley la colección de los conjuntos de la forma

$$B = \{U \cap V^c : U, V \in D(X)\}$$

es una base para la topología.

Proposición 3.4. *Sea un espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau\rangle$.*

1. *Los clopen crecientes forman una base para los abiertos crecientes, es decir, todo abierto creciente es la unión de una familia de clopen crecientes.*

2. *Los clopen decrecientes forman una base para los abiertos decrecientes, es decir, todo abierto decreciente es la unión de una familia de clopen decrecientes.*

3. *Los clopen decrecientes forman una base para los cerrados decrecientes, es decir, todo cerrado decreciente es la intersección de una familia de clopen decrecientes.*

4. *Los clopen crecientes forman una base para los cerrados crecientes, es decir, todo cerrado creciente es la intersección de una familia de clopen crecientes.*

Las pruebas de las siguientes propiedades sobre espacios de Priestley se pueden encontrar en [17, 18].

Proposición 3.5. *Sea un espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau \rangle$, entonces:*

1. *$x \leq y$ si y sólo si para todo $U \in D(X)$, si $x \in U$ entonces $y \in U$.*

2. *Si $Y \subseteq X$ es cerrado decreciente y $x \in X \setminus Y$, existe un clopen decreciente U tal que $Y \subseteq U$ y $x \notin U$.*

3. *Si $Y, Z \subseteq X$ son cerrados disjuntos, el primero decreciente y el segundo creciente, entonces existe un clopen decreciente U tal que $Y \subseteq U$ y $Z \cap U = \emptyset$.*

4. *Si $Y \subseteq X$ es cerrado creciente y $x \in X \setminus Y$, existe un clopen creciente U tal que $Y \subseteq U$ y $x \notin U$.*

Ahora recordaremos como construir el espacio de Pristley asociado a una retículo distributivo.

Sea L un retículo distributivo acotado. Sea $X(L)$ el conjunto de los filtros primos de L. Para cada $a \in L$, consideremos $\varphi(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$. Observemos que esta notación ya fue utilizada en el caso de semiretículos distributivos.

El Teorema de Representación para retículos distributivos acotados afirma que la aplicación $\varphi : L \to \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(X(L))$ es un homomorfismo de retículos distributivos acotados inyectiva. Es decir $L \simeq \varphi[L]$. De esta manera observemos que todo retículo distributivo acotado es isomorfo a un subretículo D de un retículo distributivo $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(X)$ para algún conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$.

Sea L un retículo distributivo acotado. Consideremos la topología τ en $X(L)$ determinada por la subbase

$$\{\varphi(a) : a \in L\} \cup \{\varphi(a)^c : a \in L\}.$$

Teorema 3.6. *El espacio topológico ordenado $X(L) = \langle X(L), \subseteq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley.*

Demostración. Supongamos que $P, Q \in X(L)$ son tales que $P \nsubseteq Q$. Sea $a \in P - Q$. Entonces $P \in \varphi(a)$ pero $Q \notin \varphi(a)$. Por lo tanto el espacio es totalmente disconexo en el orden.

Veamos que el espacio es compacto. Sean $I, J \subseteq L$ tales que

$$X(L) \subseteq \bigcup_{a \in I} \varphi(a) \cup \bigcup_{b \in J} \varphi(b)^c.$$

Sea H el ideal generado por I y sea F el filtro generado por J. Si $I = \emptyset$, $H = \{0\}$ y si $J = \emptyset$, $F = \{1\}$. Si $H \cap F = \emptyset$, entonces por el Teorema del Filtro Primo existe $P \in X(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $H \cap P = \emptyset$. Así para cada $a \in I$, $P \notin \varphi(a)$; y para cada $b \in J$, $P \in \varphi(b)$. Pero esto contradice la suposición sobre I y J . Por lo tanto $H \cap F \neq \emptyset$. Ahora razonamos por casos.

Si $H = \{0\}$, $0 \in F$. Por tanto existen $b_1, \ldots, b_n \in J$ tales que $b_1 \wedge \cdots \wedge b_n = 0$. Así $\varphi(b_1) \cap \cdots \cap \varphi(b_n) = \emptyset$ con lo que $X(L) = \varphi(b_1)^c \cup \cdots \cup \varphi(b_n)^c$.

Si $F = \{1\}$, $1\in H$. Por tanto existen $a_1, \ldots, a_m \in I$ tales que $a_1 \vee \cdots \vee a_m = 1$. Así $\varphi(a_1) \cup \cdots \cup \varphi(a_m) = X(L)$.

Si $H \neq \{0\}$ y $F \neq \{1\}$, entonces $I \neq \emptyset$ y $J \neq \emptyset$. Sea $c \in H \cap F$. Sean $b_1, \ldots, b_k \in J$ y sean $a_1, \ldots, a_j \in I$ tales que

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_k \leq c \leq a_1 \vee \cdots \vee a_j.$$

Entonces, si $P \in X(L)$ es tal que $c \in P$, de esa manera tenemos que $P \in \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_j)$. Y si $c \notin P$, $P \notin \varphi(b_1 \wedge \cdots \wedge b_k)$. Por lo tanto, para cada $P \in X(L)$ vale que

$$P \in \varphi(a_1 \vee \cdots \vee a_j) \cup \varphi(b_1 \wedge \cdots \wedge b_k)^c.$$

En los tres casos hemos encontrado un subcubrimiento finito. Se concluye que el espacio $\langle X(L), \subseteq, \tau\rangle$ es compacto. □

Definición 3.7. Dado un retículo distributivo acotado L el espacio topológico ordenado $\langle X(L), \subseteq, \tau\rangle$ es el espacio de Priestley de L, o espacio dual de L.

Hasta el momento hemos visto que todo retículo distributivo acotado tiene asociado el espacio de Priestley $\langle X(L), \subseteq, \tau\rangle$. Por otro lado hemos visto que todo espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau\rangle$ tiene asociado un retículo distributivo acotado $D(X)$.

Ahora nos interesa saber cuál es la relación entre L y $D(X(L))$ por un lado, y por otro lado la relación entre X y $X(D(X))$.

Proposición 3.8. *Sea L un retículo distributivo acotado, los clopen crecientes de su espacio de Priestley $X(L)$ son los conjuntos de la forma $\varphi(a)$ con $a \in L$; y los decrecientes son de la forma $\varphi(a)^c$ con $a \in L$. Es decir*

$$D(X(L)) = \{\varphi(a) : a \in L\}$$

y

$$D(X(L))^c = \{\varphi(a)^c : a \in L\}.$$

Demostración. Sea U un clopen creciente. Debemos probar que existe $b \in L$ tal que $U = \varphi(b)$.

Si $U = \emptyset$, entonces $U = \varphi(0)$ y si $U = X(L)$, entonces $U = \varphi(1)$.

Si $U \neq \emptyset, X(L)$. Sea $P \in U$, para cada $Q \notin U$, $P \nsubseteq Q$ puesto que U es creciente. Fijemos para cada $Q \notin U$, $a_Q \in P$ tal que $a_Q \notin Q$. Entonces

$$U^c = \bigcup_{Q\notin U} U^c_{a_Q} = \bigcup_{Q\notin U} \varphi(a_Q)^c.$$

Al ser U abierto, U^c es cerrado y por tanto compacto. Así

$$U^c = U^c_{a_{Q_1}} \cup \cdots \cup U^c_{a_{Q_n}}$$

para ciertos $Q_1, \ldots, Q_n \in U^c$. Pero $P \in U_{a_{Q_1}} \cap \cdots \cap U_{a_{Q_n}} \subseteq U$. Sea $a_P = a_{Q_1} \wedge \cdots \wedge a_{Q_n}$. Así

$$U_{a_P} = U_{a_{Q_1}} \cap \cdots \cap U_{a_{Q_n}}.$$

Por lo tanto,

$$U = \bigcup_{P \in U} U_{a_P}$$

Por compacidad, sean $P_1, \ldots, P_m \in U$ tales que $U = U_{a_{P_1}} \cup \cdots \cup U_{a_{P_m}}$. Entonces, si $b = a_{P_1} \vee \cdots \vee a_{P_m}$ tenemos que $U = \varphi(b)$.

Dualmente se prueba que un conjunto U es clopen decreciente si y sólo si $U = \varphi(b)^c$ para algún $b \in L$. □

Sea L un retículo distributivo acotado. Sabemos por el Teorema de Representación de Stone que L es isomorfo a $\varphi[L] = \{\varphi(a) : a \in L\}$, probaremos que φ es justamente el dual de $X(L)$, es decir $\varphi[L] \simeq D(X(L))$.

Teorema 3.9. *Sea L un retículo distributivo acotado. Sea $\langle X(L), \subseteq, \tau \rangle$ su espacio de Priestley asociado. Entonces L es isomorfo a $D(X(L))$ por medio de la función $\varphi : L \to D(X(L))$ definida por $\varphi(a) = \{P \in X(L) : a \in P\}$.*

Demostración. Según se ha visto $D(X(L)) = \{\varphi(a) : a \in L\}$. Por lo tanto φ es sobreyectiva. Probemos que es inyectiva. Supongamos que $a, b \in L$ y $a \neq b$. De esta manera $a \nleq b$ o $b \nleq a$.

Si $a \nleq b$ consideremos el filtro $[a)$ y el ideal $(b]$ que son disjuntos. Por el Teorema del Filtro Primo existe un filtro primo P tal que $[a) \subseteq P$ y $P \cap (b] = \emptyset$. Así $P \in \varphi(a)$ pero $P \notin \varphi(b)$. Por lo tanto $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Si $b \nleq a$ razonamos análogamente. Por último, es inmediato comprobar que se cumplen las siguientes condiciones: $\varphi(a) \cap \varphi(b) = \varphi(a \wedge b)$, $\varphi(a) \cup \varphi(b) = \varphi(a \vee b)$, $\varphi(0) = \emptyset$ y $\varphi(1) = X(L)$. Por lo tanto φ es un isomorfismo de retículos distributivos acotados. □

Sea $X = \langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley. Hemos visto que al dotar a la familia de conjuntos clopen crecientes $D(X)$ de las operaciones de intersección y unión se obtiene un retículo distributivo. Probaremos que el espacio de Priestley asociado a dicho retículo es homeomorfo a X, en cuanto a la topología, e isomorfo a X, en cuanto al orden.

Teorema 3.10. *Sea $X = \langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley. Entonces X y $X(D(X))$ son isomorfos como conjuntos ordenados y homeomorfos como espacios topológicos por medio de la función $\varepsilon : X \to X(D(X))$ definida por $\varepsilon(x) = \{U \in D(X) : x \in U\}$.*

Demostración. Es fácil ver que para cada $x \in X$, $\varepsilon(x)$ es un filtro primo.

Veamos que ε es inyectiva. Si $x, y \in X$ y $x \nleq y$ o $y \nleq x$. Si $x \nleq y$, sea $U \in D(X)$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Entonces $U \in \varepsilon(x) - \varepsilon(y)$, en consecuencia $\varepsilon(x) \neq \varepsilon(y)$. Si $y \nleq x$, se argumenta análogamente.

Veamos que ε es sobreyectiva. Sea $P \in X(D(X))$ y sean las familias de conjuntos

$$\{U_i \in D(X) : U_i \in P\} \text{ y } \{V_j \in D(X) : V_j \notin P\}.$$

Probemos que

$$\bigcap U_i \cap \bigcap V_j^c \neq \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Entonces tenemos que $\bigcap U_i \subseteq \bigcup V_i$. Como $\bigcap U_i$ es un conjunto cerrado, por compacidad obtenemos que existe una familia finita $V_1, \ldots, V_n$ tal que $\bigcap U_i \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n = V$. Luego, $V^c \subseteq \bigcup U_i^c$. Como V^c es cerrado, entonces es compacto. Luego obtenemos una familia finita $U_1, \ldots, U_k$ tal que $V^c \subseteq U_1^c \cup \ldots \cup U_k^c = (U_1 \cap \ldots \cap U_k)^c = U^c$. Por lo tanto $U \subseteq V$, y como P es filtro, dado que $U = U_1 \cap \ldots \cap U_k \in P$ implica que $V \in P$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe $x \in \bigcap U_i \cap \bigcap V_j^c$. Luego es sencillo comprobar que $\varepsilon(x) = P$.

Demostremos que ε es un isomorfismo de orden. Sabemos que $x \leq y$ si y sólo si para cada $U \in D(X)$ tal que $x \in U$, $y \in U$, es decir, si y sólo si $\varepsilon(x) \leq \varepsilon(y)$.

Finalmente veamos que ε es continua. Dado que el espacio es Hausdorff y compacto tendremos que ε es un homeomorfismo. Basta mostrar que las preimágenes de elementos de la subbase son conjunto abiertos. Sea $U \in D(X)$,entonces

$$\varepsilon^{-1}(\varphi(U)) = \{x \in X : \varepsilon(x) \in \varphi(U)\} = \{x \in X : x \in U\} = U$$

que es clopen. Además,

$$\varepsilon^{-1}(\varphi(U)^c) = \{x \in X : \varepsilon(x) \notin \varphi(U)\} = \{x \in X : x \notin U\} = U^c$$

que es clopen. □

3.2. Representación por filtros optimales

En el Capítulo 2 vimos que todo semiretículo distributivo L se puede representar por medio de un semiretículo de conjuntos. Dicha representación se basa en considerar el conjunto de todos los filtros primos de L y la familia $\varphi[L] = \{\varphi(a) : a \in L\}$. A partir de dicha representación pudimos construir un espacio topológico sobre el conjunto $X(L)$ tomando como base de la topología τ la familia de conjuntos $\varphi[L]$ sober y con una base de abiertos y compactos.

Pero en los semiretículos distributivos también podemos trabajar con la noción de filtros optimales. Dado un semiretículo L, veremos que es posible definir en el conjunto ordenado de los filtros optimales $Opt(L)$ una topología. El espacio resultante es un espacio de Priestley. Sabemos que todo espacio de Priestley se le asocia un retículo distributivo acotado. Dicho retículo es el conjunto $D(Opt(L))$ de todos los conjuntos abiertos, cerrados y crecientes del espacio. Claramente L será isomorfo a un semiretículo de $D(\mathrm{Opt}(L))$, y será un isomorfismo en el caso de que L sea un retículo. Pero también puede existir otro semiretículo distributivo L' tal que $D(Opt(L))$ sea isomorfo a $D(Opt(L'))$ y sin embargo L y L' no ser isomorfos. Por lo tanto la información que nos ofrece el conjunto de los filtros optimales no es suficiente para recuperar el semiretículo distributivo inicial. Para poder recuperar el semiretículo inicial deberemos parametrizar al espacio de Priestley. Dicho parámetro será un subconjunto del reducto del espacio topológico con ciertas propiedades especiales. Una de ellas, por ejemplo, es que ese conjunto será un subconjunto denso.

Lo que veremos a continuación es primero un teorema de representación utilizando los filtros optimales, y posteriormente veremos como construir una generalización de la noción de espacio de Priestley que nos permitirá recuperar el semiretículo distributivo inicial.

Recordemos que un semiretículo se dice acotado si tiene primer elemento 0. Todos los semiretículos considerados a partir de ahora son acotados.

Sea L un semiretículo distributivo. Consideremos la función

$$\beta : L \to \mathcal{P}(Opt(L))$$

definida por

$$\beta(a) = \{P \in Opt(L) : a \in P\}.$$

Entonces es sencillo probar el siguiente teorema de representación.

Teorema 3.11. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Entonces la función $\beta : L \to \mathcal{P}(Opt(L))$ es un homomorfismo de semiretículos inyectivo. Por lo tanto $\beta[L] = \{\beta(a) : a \in L\}$ es isomorfo a L.*

Demostración. Sea $a \in L$. Sea $P \in \beta(a)$ y $P \subseteq Q$. Como $P \in \beta(a)$, entonces $a \in P$, pero luego $a \in Q$, es decir, $Q \in \beta(a)$. Tenemos que $\beta(a) \in \mathcal{P}(Opt(L))$. Luego la función β está bien definida.

Probemos que $\beta(a \wedge b) = \beta(a) \cap \beta(b)$. Sea $P \in \beta(a \wedge b)$, entonces $a \wedge b \in P$. Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$, se tiene que $a, b \in P$, es decir, $P \in \beta(a) \cap \beta(b)$. Recíprocamente, si $P \in \beta(a) \cap \beta(b)$, entonces $a \in P$ y $b \in P$. Como $a \wedge b \in P$, se tiene que $P \in \beta(a \wedge b)$.

Además, $\beta(1) \subseteq Opt(L)$. Sea $P \in Opt(L)$ y sea $a \in P$, entonces $a \leq 1$, es decir, $1 \in P$ y $P \in \beta(1)$. Por lo tanto $\beta(1) = Opt(L)$.

Por último probemos que la aplicación β es inyectiva. Sean $a, b \in L$ tal que $a \neq b$. Veamos que $\beta(a) \neq \beta(b)$. Como $a \neq b$, entonces $a \nleq b$ o $b \nleq a$. Si $a \nleq b$ entonces $[a) \cap (b] = \emptyset$. Por Teorema 1.40, tenemos que existe $P \in Opt(L)$ tal que $[a) \subseteq P$ y $P \cap (b] = \emptyset$, entonces $a \in P$ y $b \notin P$, es decir, $P \in \beta(a)$ y $P \notin \beta(b)$. Si $b \nleq a$ se razona de manera análoga. Por lo tanto β es inyectiva y $L \cong \beta[L]$. □

Recordemos que por medio del conjunto de los filtros primos $X(L)$ podemos definir otro homomorfismo inyectivo

$$\varphi : L \to \mathcal{P}(X(L))$$

por

$$\varphi(a) = \{P \in X(L) : a \in P\},$$

para cada $a \in L$ y además L es isomorfo al semiretículo $\varphi[L] = \{\varphi(a) : a \in L\}$. Como todo filtro primo es optimal, tenemos que la siguiente inclusión

$$\varphi(a) \subseteq \beta(a),$$

para cada $a \in L$.

Ahora vamos a probar un resultado técnico que será necesario más adelante.

Teorema 3.12. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Sean $a_1, \ldots, a_n, a \in L$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\bigcap [a_i) \subseteq [a)$.
2. $\beta(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \beta(a_i)$.
3. $\varphi(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_i)$.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Supongamos que $P \in \beta(a)$ y $P \notin \bigcup_{i=1}^{n} \beta(a_i)$. Entonces, $P \notin \beta(a_i)$, es decir, $a_i \notin P$, para cada $1 \leq i \leq n$. Como P es optimal y $\bigcap [a_i) \subseteq [a)$, entonces por Lema 1.39 $a \notin P$, contradicción. Por lo tanto $\beta(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \beta(a_i)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Notemos que $\varphi(a) = \beta(a) \cap X(L)$. Por lo tanto,

$$\varphi(a) = \beta(a) \cap X(L) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \beta(a_i) \cap X(L) = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_i).$$

.

$(3) \Rightarrow (1)$ Supongamos que existen $a_1, \ldots, a_n, a \in L$ tales que $\bigcap [a_i) \nsubseteq [a)$. Entonces existe $b \in \bigcap [a_i)$ y $b \notin [a)$, es decir, $a \nleq b$. Por el teorema del Filtro Primo, existe $P \in X(L)$ tal que $a \in P$ y $b \notin P$. Luego, $P \in \varphi(a) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(a_i)$. De esta forma $a_i \in P$ para algún $1 \leq i \leq n$. Como $b \in \bigcap [a_i)$, entonces $a_i \leq b$ para todo $1 \leq i \leq n$. En consecuencia obtenemos que $b \in P$, lo que es un absurdo. □

Teorema 3.13. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Entonces*

$$\langle \varphi [L], \cap, \emptyset, X(L) \rangle$$

y

$$\langle \beta [L], \cap, \emptyset, Opt(L) \rangle$$

son semiretículos distributivos isomorfos.

Demostración. La prueba es inmediata teniendo en cuenta que $\varphi [L] \cong L \cong \beta [L]$. □

Consideremos un conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$ y sea $\mathcal{P}_c(X)$ el conjunto ordenado de todos los subconjuntos crecientes. Consideremos un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}_c(X)$ tal que $\langle E, \cap, X \rangle$ es un semiretículo distributivo. Consideremos el conjunto

$$D(E) = \{A = U_1 \cup \cdots \cup U_n : U_i \in E\}.$$

Diremos que $D(E)$ es la clausura bajo uniones finitas de E.

Entonces es sencillo comprobar que

$$\langle D(E), \cap, \cup, X \rangle$$

es un retículo distributivo. Si E es acotado, es decir, si $\emptyset \in E$, entonces $\langle D(E), \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ es un retículo distributivo acotado. De esta manera, dado un semiretículo distributivo L, los retículos

$$\langle D(\varphi[L]), \cap, \cup, \emptyset, X(L) \rangle$$

y

$$\langle D(\beta[L]), \cap, \cup, \emptyset, Opt(L) \rangle$$

son retículos distributivos acotados.

Sabemos que los semiretículos $\langle \varphi[L], \cap, X(L)) \rangle$ y $\langle \beta[L], \cap, Opt(L) \rangle$ son isomorfos. Ahora veremos que la clausura bajo uniones de dichos conjuntos son retículos distributivos isomorfos. Este retículo, será lo que llamaremos más adelante la extensión libre de L.

Teorema 3.14. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Entonces*

$$\langle D(\varphi[L]), \cap, \cup, \emptyset, X(L) \rangle \cong \langle D(\beta[L]), \cap, \cup, \emptyset, Opt(L) \rangle .$$

Demostración. Consideremos la función $f : D(\varphi[L]) \longrightarrow D(\beta[L])$ definida por

$$f(\varphi(a_1) \cup \cdots \cup \varphi(a_n)) = \beta(a_1) \cup \cdots \cup \beta(a_n).$$

Es claro que f está bien definida. Además f que es un homomorfismo de retículos sobreyectivo. Por la Proposición 3.12 obtenemos que

$$\varphi(a_1) \cup \cdots \cup \varphi(a_n) = \varphi(b_1) \cup \cdots \cup \varphi(b_m)$$

si y sólo si

$$\beta(a_1) \cup \cdots \cup \beta(a_n) = \beta(b_1) \cup \cdots \cup \beta(b_n).$$

Entonces f es inyectiva. Por lo tanto f es un isomorfismo de retículos. □

3.3. Espacios de Priestley generalizados

Sea L un semiretículo distributivo acotado. Recordemos que la función

$$\beta : L \to \mathcal{P}(Opt(L)),$$

definida por

$$\beta(a) = \{P \in Opt(L) : a \in P\}$$

nos permite probar el Teorema de Representación 3.11 que afirma que L es isomorfo a un subsemiretículo de $\mathcal{P}(Opt(L))$. Ahora vamos a dotar de una topología tipo Priestley al conjunto

$\mathrm{Opt}(L)$ de tal forma que, con algunos otros parámetros, se pueda recuperar una copia isomorfa de L.

Consideremos la familia

$$S_L = \{\beta(a) : a \in L\} \cup \{\beta(b)^c : b \in L\}.$$

Esta familia forma una subbase para una topología τ definida en el conjunto $Opt(L)$ pues

$$\mathrm{Opt}(L) = \bigcup \{\beta(a) : a \in L\} \cup \{\beta(b)^c : b \in L\}.$$

Notemos que U es un básico si y sólo si existen conjuntos finitos $\{a_1, \ldots, a_n\}$y $\{b_1, \ldots, b_m\}$ de L tales que

$$\begin{aligned} U &= \beta(a_1) \cap \cdots \cap \beta(a_n) \cap \beta(b_1)^c \cap \cdots \cap \beta(b_m)^c \\ &= \beta(a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \cap \beta(b_1)^c \cap \cdots \cap \beta(b_m)^c \\ &= \beta(a) \cap \beta(b_1)^c \cap \cdots \cap \beta(b_m)^c. \end{aligned}$$

Por lo tanto los básicos de la topología τ son de la forma $\beta(a) \cap \beta(b_1)^c \cap \cdots \cap \beta(b_m)^c$, para alguna familia finita $\{a, b_1, \ldots, b_m\}$ de L. Es decir,

Teorema 3.15. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Consideremos la topología τ generada por la subbase S_L. Entonces la terna*

$$\langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$$

es un espacio de Priestley.

Demostración. Comprobemos que el espacio $\langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$ es compacto. Sean $A, B \subset L$ tales que

$$Opt(L) = \bigcup \{\beta(a) : a \in A\} \cup \{\beta(b)^c : b \in B\}.$$

Consideremos el filtro generado por B, es decir, $F(B)$, y el ideal de Frink generado por A, es decir,

$$I_F(A) = \left\{ c \in L : \exists a_1, \ldots a_n \in L \ \bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [c) \right\}.$$

Si suponemos que

$$F(B) \cap I_F(A) = \emptyset,$$

entonces por el Teorema del Filtro Optimal, existe un $P \in Opt(L)$ tal que $F(B) \subseteq P$ y $P \cap I_F(A) = \emptyset$. Luego,

$$P \in \bigcap \{\beta(b) : b \in B\} \ y \ P \notin \bigcup \{\beta(a) : a \in A\}.$$

En consecuencia

$$P \notin \bigcup \{\beta(a) : a \in A\} \cup \{\beta(b)^c : b \in B\}.$$

Lo que es un absurdo. Por lo tanto, existe un elemento $c \in F(B) \cap I_F(A)$. Entonces existe $a_1, \ldots a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_m \in B$ tales que $b_1 \wedge \cdots \wedge b_m \leq c$ y $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [c)$. Luego por Teorema 3.12,

$$\beta(b_1 \wedge \cdots \wedge b_m) = \beta(b_1) \cap \cdots \cap \beta(b_m) \subseteq \beta(c) \subseteq \bigcup \{\beta(a_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

y en consecuencia

$$\bigcup \{\beta(a_i) : 1 \leq i \leq n\} \cup \beta(b_1)^c \cup \cdots \cup \beta(b_m)_c = \mathrm{Opt}(L).$$

Con esto hemos probado que el espacio es compacto.

El espacio es totalmente disconexo, pues para cada par $P, Q \in \mathit{Opt}(L)$ tal que $P \nsubseteq Q$ existe un $a \in P$ y $a \notin Q$. Por lo tanto, $P \in \beta(a)$ y $Q \notin \beta(a)$. □

Como $\langle \mathit{Opt}(L), \subseteq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley, entonces el *retículo dual* formado por todos los cerrados-abiertos y crecientes

$$D(\mathit{Opt}(L)) = (D(\mathit{Opt}(L)), \cup, \cap, \emptyset, \mathit{Opt}(L)),$$

es un retículo distributivo acotado. Este es un retículo que contiene una copia isomorfa al semiretículo L. Para poder recuperar el semiretículo vamos a tener que considerar ciertas restricciones al espacio de Priestley $\langle \mathit{Opt}(L), \subseteq, \tau \rangle$. Ahora nos dedicaremos a estudiar cuales son dichas restricciones. Esto nos llevará a definir el concepto de espacio de Priestley generalizado.

Primero veamos que papel cumple el conjunto de los filtros irreducibles en el espacio $\langle \mathit{Opt}(L), \subseteq, \tau \rangle$.

Lema 3.16. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Consideremos el espacio de Priestley $\mathit{Opt}(L) = \langle \mathit{Opt}(L), \subseteq, \tau \rangle$. Entonces*

1. *El conjunto de los filtros primos $X(L)$ es un subconjunto denso de $\mathit{Opt}(L)$.*
2. *Todo abierto creciente U de $\mathit{Opt}(L)$ es unión de elementos de $\{\beta(a) : a \in L\}$.*

Demostración. (1) Debemos probar que $\mathrm{cl}(X(L)) = \mathit{Opt}(L)$. Pero esto es equivalente a probar que para todo básico no vacío U del espacio $\mathit{Opt}(L)$ intersecta a $X(L)$, es decir, $U \cap X(L) \neq \emptyset$, para todo básico $U \neq \emptyset$.

Sea U un básico no vacío. Entonces existen $a, b_1, \ldots, b_n \in L$ tales que

$$U = \beta(a) \cap \beta(b_1)^c \cap \cdots \cap \beta(b_n)^c.$$

Como $U \neq \emptyset$, entonces $\beta(a) \nsubseteq \bigcup \{\beta(b_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Luego por Teorema 3.12 $\varphi(a) \nsubseteq \bigcup \{\varphi(b_i) : 1 \leq i \leq n\}$, es decir, existe un $P \in \varphi(a)$ y $P \notin \bigcup \{\varphi(b_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Luego,

$$P \in \varphi(a) \cap \varphi(b_1)^c \cap \cdots \cap \varphi(b_n)^c \cap X(L).$$

Por lo tanto $X(L)$ es denso en $\mathit{Opt}(L)$.

(2) Sea U un abierto y creciente de $Opt(L)$. Sea $P \in U$. Para cada $Q \notin U$, al ser U creciente, $P \nsubseteq Q$. Luego para cada $Q \notin U$ existe un $a_Q \in L$ tal que $a_Q \in P$ y $a_Q \notin Q$. Entonces

$$U^c \subseteq \bigcup \{\beta(a_Q)^c : Q \notin U\} \ y \ P \in \bigcap \{\beta(a_Q) : Q \notin U\}.$$

Como U^c es cerrado y el espacio es compacto, entonces U^c es compacto. Luego, existen $a_{Q_1}, \ldots, a_{Q_n} \in L$ tales que $P \in \beta(a_{Q_1} \wedge \cdots \wedge a_{Q_n}) = \beta(a_P)$ y $\beta(a_P) \subseteq U$. Por lo tanto, $U = \bigcup \{\beta(a_P) : P \in U\}$. □

Sea L un semiretículo distributivo acotado. Si U es un conjunto clopen creciente del espacio $\langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que

$$U = \beta(a_1) \cup \cdots \cup \beta(a_n).$$

En particular cualquier conjunto de la forma $\beta(a)$ es un clopen creciente. Ahora vamos a caracterizar exactamente los clopen crecientes que son de esta forma.

Teorema 3.17. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Consideremos el espacio de Priestley $Opt(L) = \langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$. Sea U un clopen creciente de $Opt(L)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $U = \beta(a)$, para algún $a \in L$.
2. $U^c = (X(L) \cap U^c]$.
3. $\max U^c \subseteq X(L)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Como $X(L) \subseteq Opt(L)$, entonces $X(L) \cap U^c \subseteq U^c$, y al ser U^c decreciente, se tiene que $(X(L) \cap U^c] \subseteq U^c$.

Sea $P \in U^c = \beta(a)^c$. Entonces $a \notin P$. Luego $P \cap (a] = \emptyset$, y por el Teorema del Filtro Primo, existe un $Q \in X(L)$ tal que $P \subseteq Q$ y $a \notin Q$. Luego, $P \in (X(L) \cap U^c]$. Por lo tanto, $U^c = (X(L) \cap U^c]$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $P \in \max U^c$. Entonces $P \in U^c = (X(L) \cap U^c]$, luego existe $Q \in X(L) \cap U^c$ tal que $P \subseteq Q$. Pero al ser P maximal en U^c, $P = Q \in X(L)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Como U es clopen creciente, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que $U = \beta(a_1) \cup \cdots \cup \beta(a_n)$. Consideremos el filtro $F = \bigcap \{[a_i) : 1 \leq i \leq n\}$ y el ideal de Frink $I = I_F(a_1, \ldots, a_n)$. Si $F \cap I = \emptyset$, por Teorema del filtro Optimal existe un $P \in \mathrm{Opt}(L)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$. Entonces, para cada $1 \leq i \leq n$, $a_i \in I$ y $a_i \notin P$. Luego, $P \notin U = \beta(a_1) \cup \cdots \cup \beta(a_n)$. Por dualidad de Priestley existe un $Q \in \max U^c$ tal que $P \subseteq Q$. Por hipótesis, Q es primo y además $F = \bigcap \{[a_i) : 1 \leq i \leq n\} \subseteq P \subseteq Q$. Luego, $a_i \in Q$ para algún $1 \leq i \leq n$, lo que es imposible. Por lo tanto, $F \cap I \neq \emptyset$. Entonces existe un $a \in F \cap I$. Es decir, $a \in \bigcap \{[a_i) : 1 \leq i \leq n\}$ y $\bigcap \{[a_i) : 1 \leq i \leq n\} \subseteq [a)$. Entonces $a = a_1 \vee \cdots \vee a_n$, y en consecuencia $U = \beta(a)$. □

Ya estamos en condiciones de definir el espacio de Priestley dual de un semiretículo distributivo. Primero definimos a los subconjuntos admisibles.

Definición 3.18. Sea $\langle X, \leq, \tau \rangle$ un espacio de Priestley. Sea X_0 un subconjunto denso de X. Diremos que un clopen U es *admisible* en X_0 si $\max U^c \subseteq X_0$.

Dado un espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$ generalizado, denotamos con X^* o con $S(X)$ al conjunto de todos los clopen admisibles en X_0, es decir

$$S(X) = \{U \in D(X) : \max U^c \subseteq X_0\} .$$

Ya estamos en condiciones de dar la definición de los espacios tipo Priestley duales a los semi-retículos distributivos acotados.

Observación 3.19. Recordemos que un conjunto $I = \{U_i \in S(X)\}$ es directo si para cada familia finita $U_1, \ldots, U_n \in I$ existe un $V \in I$ tal que $U_i \subseteq V$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Definición 3.20. Un espacio de Priestley generalizado es una estructura $\langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$ tal que

1. $\langle X, \leq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley.
2. X_0 es un subconjunto denso de X tal que $X = (X_0]$.
3. $x \in X_0$ si y sólo si $I_x = \{U \in S(X) : x \notin U\}$ es un conjunto directo.
4. El orden $\leq$ queda determinado por los conjuntos admisibles. Es decir, $x \leq y$ si y sólo si $\forall U \in S(X)$ $x \in U$ implica que $y \in U$.

Notemos que cuando $X = X_0$ las condiciones (2) a (4) son redundantes.

Teorema 3.21. *Sea L un semiretículo distributivo acotado. Entonces*

$$\langle Opt(L), \subseteq, \tau, X(L) \rangle$$

es un espacio de Priestley generalizado.

Demostración. Hemos probado anteriormente que $\langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$ es un espacio de Priestley. También demostramos que el conjunto $X(L)$ es un subconjunto denso de $\langle Opt(L), \subseteq, \tau \rangle$. Por el Teorema 3.17 un clopen creciente U es admisible si y sólo si $U = \beta(a)$, para algún $a \in L$. Por lo tanto

$$S(Opt(L)) = \beta[L] .$$

Probemos que $x \in X(L)$ si y sólo si $I_x = \{\beta(a) : x \notin \beta(a)\}$. Sea $x \in X(L)$ y sean $\beta(a), \beta(b) \in I_x$. Entonces $x \notin \beta(a), \beta(b)$ y en consecuencia $a, b \notin x$. Como x es un filtro primo de L, tenemos que $[a) \cap [b) \nsubseteq x$. Por lo tanto existe $c \in [a) \cap [b)$ tal que $c \notin x$. De esta manera $x \notin \beta(c)$ y tenemos que $\beta(a) \cup \beta(b) \subseteq \beta(c)$. Por lo tanto $\beta(c) \in I_x$ y este es directo.

Sea I_x directo y supongamos que $x \notin X(L)$. Entonces existen filtros F_1 y F_2 tales que $F_1 \cap F_2 \subseteq x$ pero $F_1 \nsubseteq x$ y $F_2 \nsubseteq x$. Sean $a \in F_1 - x$ y $b \in F_2 - x$, entonces $x \notin \beta(a), \beta(b)$. Luego $\beta(a), \beta(b) \in I_x$. Como I_x es directo, existe $\beta(c) \in I_x$ tal que $\beta(a) \cup \beta(b) \subseteq \beta(c)$. De esta manera $c \notin x$ y $c \in [a) \cap [b) \subseteq F_1 \cap F_2 \subseteq x$. Por lo tanto $c \in x$, lo cual es una contradicción.

Es claro que el orden $\subseteq$ queda determinado por el conjunto de los admisibles. □

Teorema 3.22. *Sea $\langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$ un espacio de Priestley generalizado. Entonces*

$$\langle S(X), \cap, \emptyset, X \rangle$$

es un semiretículo distributivo acotado.

Demostración. Probemos que $S(X)$ es cerrado bajo intersecciones. Sean $U, V \in S(X)$. Entonces

$$\max((U \cap V)^c) = \max(U^c \cup V^c) \subseteq \max U^c \cup \max V^c \subseteq X_0.$$

Por lo tanto, $U \cap V \in S(X)$.

Además $\max(X^c) = \max(\emptyset) = \emptyset \subseteq X_0$. Luego, $X \in S(X)$.

También, $\max(\emptyset^c) = \max X \subseteq X_0$, y por lo tanto $\emptyset \in S(X)$.

Veamos ahora que $S(X)$ es distributivo. Consideremos $U, V, W \in S(X)$ tal que $U \cap V \subseteq W$. Entonces $W^c \subseteq U^c \cup V^c$. Para cada $x \in \max(W^c)$ tenemos que $x \in U^c$ o $x \in V^c$. Por lo tanto, $W \in I_x$ y $U \in I_x$ o $V \in I_x$. Como $x \in X_0$, entonces por (3) de la definición de espacio de Priestley generalizado tenemos que $W, U \in I_x$ o $W, V \in I_x$. Si $W, U \in I_x$ entonces existe $U_x \in I_x$ tal que $W \cup U \subseteq U_x$. Si, $W, V \in I_x$ entonces existe $V_x \in I_x$ tal que $W \cup V \subseteq V_x$. Por lo tanto

$$W^c = \bigcup \{K_x : x \in \max(W^c)\}$$

donde $K_x = U_x^c$ o $K_x = V_x^c$. Como W^c es compacto, y cada conjunto K_x es abierto, entonces existe subconjuntos finitos A y B de $\max W^c$ tal que

$$W^c = \bigcup \{U_x^c : x \in A\} \cup \bigcup \{V_x^c : x \in B\}.$$

Sea $U' = \bigcap \{U_x : x \in A\}$ y $V' = \bigcap \{V_x : x \in B\}$. Es claro que $U \subseteq U'$ y $V \subseteq V'$ y $U', V' \in S(X)$. Como $W^c = U'^c \cup V'^c$, entonces $W = U' \cap V'$. Por lo tanto $\langle S(X), \cap, \emptyset, X \rangle$ es distributivo. □

De los resultados anteriores obtenemos el siguiente teorema de representación.

Teorema 3.23 (de Representación)**.** *Para cada semiretículo distributivo acotado L existe un espacio de Priestley generalizado $\langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$ tal que L es isomorfo a $S(X)$.*

Probaremos a continuación algunas propiedades que serán necesarias más adelante.

Lema 3.24. *Sea X un espacio de Priestley generalizado. Entonces*

1. *Para cada $U \in D(X)$, $\mathrm{cl}(U \cap X_0) = U$.*

2. *Para toda familia $U_1, \ldots, U_n, U \in S(X)$, tenemos que*

$$\bigcap [U_i) \subseteq [U) \text{ si y sólo si } U \subseteq \bigcup U_i.$$

3. *La clausura de $S(X)$ bajo uniones finitas es $D(X)$.*

4. *La familia $S(X) \cup \{U^c : U \in S(X)\}$ es una subbase del espacio de X.*

Demostración. (1) Sea $U \in D(X)$. Como X_0 es denso en X y U es abierto, entonces $\mathrm{cl}(U \cap X_0) = cl(U)$. Como U es cerrado $cl(U) = U$. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(U \cap X_0) = U$.

(2)Supongamos que $\bigcap [U_i) \subseteq [U)$. Primero veamos que $U \cap X_0 \subseteq \bigcup U_i$. Sea $x \in U \cap X_0$. Si $x \notin \bigcup U_i$, entonces $x \notin U_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Por condición (3) de la definición 3.20, existe $V \in S(X)$ tal que $U_i \subseteq V$ para cada $1 \leq i \leq n$, y $x \notin V$. Entonces $V \in \bigcap [U_i) \subseteq [U)$, es decir, $U \subseteq V$, como $x \in U$ esto implica que $x \in V$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $U \cap X_0 \subseteq \bigcup U_i$. Entonces $\mathrm{cl}(U \cap X_0) \subseteq \bigcup U_i$ y por el punto (1), $\mathrm{cl}(U \cap X_0) = U$. Entonces $U \subseteq \bigcup U_i$.

Supongamos que $U \subseteq \bigcup U_i$. Para la otra implicación consideremos $V \in \bigcap [U_i)$. Entonces $U_i \subseteq V$, para cada $1 \leq i \leq n$. Luego, $\bigcup U_i \subseteq V$. Luego $U \subseteq V$, es decir, $V \in [U)$. Por lo tanto $\bigcap [U_i) \subseteq [U)$.

(3) Sea $S(X)^{\cup}$ la clausura bajo uniones finitas de $S(X)$. Claramente $S(X) \subseteq D(X)$ y como $D(X)$ está cerrado bajo uniones, $S(X)^{\cup} \subseteq D(X)$. Comprobemos la otra inclusión. Sea $U \in D(X)$. Ya que $\emptyset, X \in S(X)$, podemos suponer que $U \neq \emptyset, X$. Fijamos $x \in U$. Para cada $y \notin U$, como U es creciente, $x \nleq y$. Luego, por condición (4) de la definición 3.20 para cada $y \notin U$ existe un $U_y \in S(X)$ tal que $x \in U_y$ e $y \notin U_y$. Entonces,

$$U^c \subseteq \bigcup \left\{ U_y^c : y \notin U_y \right\}.$$

Como U^c es compacto, existen $y_1, \ldots, y_n \notin U$ tales que $U^c \subseteq U_{y_1}^c \cup \cdots \cup U_{y_n}^c = (U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n})^c$. Luego $x \in U_x = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} \subseteq U$. Como $S(X)$ es cerrado bajo intersecciones finitas, $U_x \in S(X)$. En consecuencia, $U = \bigcup \{U_x : x \in U\}$, y como X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in U$ tales que $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$, es decir $U \in S(X)$. Por lo tanto $S(X)^{\bigcup} = D(X)$.

(4) Por dualidad de priestley, sabemos que la familia $D(X) \cup \{A^c : A \in D(X)\}$ es una subbase para la topología de X. Entonces la familia $\{A - B : A, B \in D(X)\}$ es una base. Por el punto (3) anterior, $A = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $B = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, con $U_i, V_j \in S(X)$, para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$. Luego

$$A - B = \bigcup_{i=1}^{n} U_i - \bigcup_{j=1}^{m} V_j = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} V_j^c).$$

Entonces los elementos de la base $\{A - B : A, B \in D(X)\}$ son intersecciones finitas de elementos de $S(X) \cup \{U^c : U \in S(X)\}$. Por lo tanto, la familia $S(X) \cup \{U^c : U \in S(X)\}$ es una subbase de la topología de X . □

Sea $X = \langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$ un espacio de Priestley generalizado. Para cada $x \in X$ consideremos el conjunto

$$\varepsilon(x) = \{U \in S(X) : x \in U\}.$$

Ahora vamos a probar que podemos considerar una función $\varepsilon : X \to \mathrm{Opt}(S(X))$.

Teorema 3.25. *Sea X un espacio de Priestley generalizado. Entonces para cada $x \in X$, tenemos que $\varepsilon(x) \in Opt(S(X))$. Si $x \in X_0$, entonces $\varepsilon(x)$ es un filtro primo o irreducible de $S(X)$.*

Demostración. Sea $x \in X$, probemos que $\varepsilon(x)$ es un filtro de $S(X)$. Por un lado sean $U \in S(X)$ y $V \in \varepsilon(x)$ tal que $V \subseteq U$. Entonces $x \in V$ y en consecuencia $x \in U$. Luego $U \in \varepsilon(x)$. Por otro lado, si $U, V \in \varepsilon(x)$ entonces $x \in U, V$. Luego $x \in U \cap V$ y en consecuencia $U \cap V \in \varepsilon(x)$. Por lo tanto $\varepsilon(x)$ es un filtro de $S(X)$.

Probemos que $S(X) - \varepsilon(x)$ es un ideal de Frink. Supongamos que $U_1, \ldots, U_n \in S(X) - \varepsilon(x)$, $U \in S(X)$ y $\bigcap_{i=1}^{n} [U_i) \subseteq [U)$. Por (2) del Lema anterior tenemos $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Como $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ entonces $x \notin U$. Por lo tanto, $U \in S(X) - \varepsilon(x)$ y en consecuencia $S(X) - \varepsilon(x)$ es un ideal de Frink, es decir, $\varepsilon(x) \in \mathit{Opt}(S(X))$.

Por último, supongamos que $x \in X_0$. Sean $U, V \in S(X)$ tales que $U, V \notin \varepsilon(x)$. Entonces $x \notin U$ y $x \notin V$, se sigue que $U, V \in I_x$. Como I_x es directo, existe un $W \in S(X)$ tal que $U \cup V \subseteq W$ y $x \notin W$. Por lo tanto $\varepsilon(x) \in X(S(X))$. □

Teorema 3.26. *Sea X un espacio de Priestley generalizado. Entonces la función*

$$\varepsilon : X \to \mathit{Opt}(S(X))$$

es un isomorfismo de orden, un homeomorfismo y además $\varepsilon[X_0] = X(S(X))$.

Demostración. Es claro que por la condición (4) de la Definición de espacio de Priestley generalizado tenemos que para todo $x, y \in X$, $x \leq y$ si y sólo si $\varepsilon(x) \subseteq \varepsilon(y)$. Entonces ε es un isomorfismo de orden. Probemos que ε es sobreyectiva. Sea $P \in \mathit{Opt}(S(X))$. Consideremos las familias $\{U_i \in S(X) : U_i \in P\}$ y $\{V_j \in S(X) : V_j \notin P\}$. Entonces probemos que

$$\bigcap \{U_i : U_i \in P\} \cap \bigcap \left\{V_j^c : V_j \notin P\right\} \neq \emptyset.$$

Supongamos lo contrario. Entonces

$$\bigcap \{U_i : U_i \in P\} \subseteq \{V_j : V_j \notin P\},$$

y como $\bigcap \{U_i : U_i \in P\}$ es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, entonces es compacto. Luego existe una familia finita $\{V_1, \ldots, V_n\}$ tal que $\bigcap \{U_i : U_i \in P\} \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Luego $V_1^c \cap \cdots \cap V_n^c \subseteq \bigcup \{U_i^c : U_i \in P\}$, y nuevamente por compacidad obtenemos un conjunto finito $\{U_1, \ldots, U_k\}$ tal que $V_1^c \cap \cdots \cap V_n^c \subseteq U_1^c \cup \cdots \cup U_k^c$. Entonces, $U = U_1 \cap \cdots \cap U_k \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Como $S(X)$ es un semiretículo, $U \in S(X)$ y además $U \in P$, por ser filtro. Como $\bigcap [V_i) \subseteq [U)$ si y sólo si $U \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$, teniendo en cuenta que $V_i \notin P$, y P es optimal, Por (2) del Lema 1.39 tenemos que $U \notin P$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe un $x \in \bigcap \{U_i : U_i \in P\} \cap \bigcap \left\{V_j^c : V_j \notin P\right\}$. Ahora es sencillo comprobar que $\varepsilon(x) = P$, y por lo tanto ε es sobreyectiva.

Por teorema anterior sabemos que para cada $x \in X_0$, $\varepsilon(x) \in X(S(X))$. Veamos que

$$\varepsilon|_{X_0} : X_0 \to X(S(X))$$

es sobreyectiva. Sea $P \in X(S(X))$. Como P es también optimal, y ε es sobreyectiva, entonces existe $x \in X$ tal que $\varepsilon(x) = P$. Debemos probar que $x \in X_0$. Supongamos que $x \notin X_0$. Entonces el conjunto $I_x = \{U \in S(X) : x \notin U\}$ no es directo. Es decir, existen $U, V \in I_x$ tales que para cualquier $W \in S(X)$ si $U \cup V \subseteq W$, entonces $W \notin I_x$, es decir, $x \in W$. Por lo tanto, para cada $W \in [U) \cap [V)$ tenemos que $W \in \varepsilon(x)$. Entonces $[U) \cap [V) \subseteq \varepsilon(x)$ y como $\varepsilon(x) = P$ es primo, tenemos que $U \in \varepsilon(x)$ o $V \in \varepsilon(x)$, es decir, $x \in U$ o $x \in V$, lo que es una contradicción. En consecuencia $x \in X_0$. Como conclusión tenemos que $\varepsilon\,[X_0] = X(S(X))$.

Sólo nos resta probar que ε es un homeomorfismo. Por el ítem (4) del Lema 3.24 tenemos que la familia $S(X) \cup \{U^c : U \in S(X)\}$ es una subbase para la topología de X. Entonces la familia $\{\beta(U) : U \in S(X)\} \cup \{\beta(U)^c : U \in S(X)\}$ es una subbase para la topología en el espacio de priestley $\langle \mathrm{Opt}(S(X)), \subseteq, \tau, X(S(X))\rangle$ asociado al semiretículo $S(X)$. Entonces dado $U \in S(X)$ tenemos que:

$$x \in \varepsilon^{-1}(\beta(U)) \Leftrightarrow \varepsilon(x) \in \beta(U) \Leftrightarrow U \in \varepsilon(x) \Leftrightarrow x \in U.$$

Por lo tanto, $\varepsilon^{-1}(\beta(U)) = U$. De igual forma se demuestra que $\varepsilon^{-1}(\beta(U^c)) = U^c$. En consecuencia ε es una función continua y biyectiva entre espacios compactos y de Hausdorff, entonces ε es un homeomorfismo. □

Resumimos lo hecho hasta ahora en los siguientes ítems:

- Dado un semiretículo distributivo acotado L, la estructura

$$\langle Opt(L), \subseteq, \tau, X(L)\rangle$$

  es un espacio de Priestley generalizado.

- Si $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ es un espacio de Priestley generalizado. Entonces
  - La función $\beta : L \to S(Opt(L))$ es un isomorfismo de semiretículos distributivos acotados. Por lo tanto, $L \cong S(Opt(L))$.
  - La función $\varepsilon : X \to Opt(S(X))$ es un isomorfismo de orden y un homeomorfismo.

Para completar una dualidad entre los semiretículos distributivos acotados y los espacios de Priestley generalizados debemos definir apropiados morfismos y probar que dichos morfismos están conectados categóricamente. Este es el objetivo de la próxima sección.

3.4. Dualidad para homomorfismos

En esta parte vamos introducir diferentes morfismos entre espacios de Priestley generalizados que corresponden a los homomorfismos entre semireticulos distributivos acotados. Muchos de los resultados están motivados por los resultados análogos dados en el caso de los DS-espacios.

Sean A, B semiretículos distributivos. Una aplicación $h : A \to B$ es un homomorfismo si:

1. $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$.
2. $h(1) = 1$.

Recordemos que para la dualidad entre semiretículos y DS-espacios, un homomorfismo $h : A \to B$ entre dos semiretículos distributivos A y B se representa por una relación binaria $R_h \subseteq X(B) \times X(A)$ definida por $(P, Q) \in R_h$ si y sólo si $h^{-1}(P) \subseteq Q$. Esta relación cumple las propiedades siguientes:

1. Para cada $P \in X(B)$, $R_h(P)$ es un conjunto cerrado en el DS-espacio de A.

2. Para cada $a \in A$, se tiene que $h_{R_h}(\varphi(a)) = \varphi(h(a))$.

De esta forma se construye una dualidad entre la categoría de los semiretículos distributivos y la categoría de los DS-espacios donde los morfismos entre DS-espacios son relaciones que cumplen las dos condiciones anteriores. Para más detalles sobre la conexión entre homomorfismos de semiretículos distributivos y relaciones definidas entre sus DS-espacios se puede consultar los trabajos [6] y [8].

Ahora veremos que estas ideas pueden ser extendidas al caso de considerar espacios de Priestley generalizados. Asociaremos a cada homomorfismo de semiretículos distributivos una relación definida entre sus conjuntos de filtros optimales. Caracterizaremos a estas relaciones y veremos que son justamente los objetos duales de los homomorfismos de semiretículos.

Dado un homomorfismo $h : A \to B$ entre dos semiretículos distributivos acotados, definimos la relación binaria asociada al homomorfismo

$$R_h \subseteq \mathrm{Opt}(B) \times \mathrm{Opt}(A)$$

como

$$(P, Q) \in R_h \Leftrightarrow h^{-1}(P) \subseteq Q,$$

donde $h^{-1}(P) = \{x \in A : h(x) \in P\}$.

También recordemos que dada una relación R entre dos conjuntos X e Y, notaremos con h_R a la función $h_R : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definida por

$$h_R(U) = \{x \in X : R(x) \subseteq U\},$$

para cada $U \in \mathcal{P}(Y)$.

Sea $R \subseteq X \times Y$ una relación binaria. Para cada $x \in X$, definimos el conjunto

$$R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\}.$$

Lema 3.27. *Sea $h : A \to B$ un homomorfismo entre dos semiretículos distributivos acotados. Entonces las siguientes condiciones son verdaderas:*

1. $(\subseteq \circ R_h \circ \subseteq) \subseteq R_h$.

2. *$h(a) \notin P$ si y sólo si existe un $Q \in \mathrm{Opt}(A)$ tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$ y $a \notin Q$.*

3. *$\beta(h(a)) = h_{R_h}(\beta(a))$, para cada $a \in A$.*

Demostración. (1) Sea $(P,Q) \in \subseteq \circ R_h \circ \subseteq$. Entonces existe $U \in Opt(A)$ y $V \in Opt(B)$ tal que $P \subseteq V, (V,U) \in R_h$ y $U \subseteq Q$. De esta manera,

$$h^{-1}(P) \subseteq h^{-1}(V) \subseteq U \subseteq Q.$$

Por lo tanto, $(P,Q) \in R_h$.

(2) Sea $h(a) \notin P$. Entonces $a \notin h^{-1}(P)$. Como h es una función que preserva el ínfimo, entonces $h^{-1}(P)$ es un filtro de A. Entonces existe un filtro optimal Q de A tal que $h^{-1}(P) \subseteq Q$ y $a \notin Q$. La otra dirección es inmediata.

(3) Sabemos que $x \in \beta(h(a))$ si y sólo si $h(a) \in x$ si y sólo si $a \in h^{-1}(x)$. Además $x \in h_{R_h}(\beta(a))$ si y sólo si $\forall y \in Opt(A), (x,y) \in R_h \Rightarrow a \in y$ si y sólo si $\forall y \in Opt(B), h^{-1}_{R_h}(y) \subseteq x \Rightarrow a \in y$.

Ahora bien $h^{-1}_{R_h}(x) = A$ o $h^{-1}_{R_h}(x)$ es un filtro propio de A. Por un lado, si $h^{-1}_{R_h}(x) = A$ entonces para cada $y \in Opt(A)$ tenemos que $h^{-1}_{R_h}(x) \nsubseteq y$. Por lo tanto $a \in h^{-1}(x)$ y $\forall y \in \mathrm{Opt}(B), h^{-1}_{R_h}(y) \subseteq x \Rightarrow a \in y$ son trivialmente verdaderas. Además $a \in h^{-1}(x)$ si y sólo si $\forall y \in Opt(B), h^{-1}_{R_h}(y) \subseteq x \Rightarrow a \in y$.

Por otro lado si $h^{-1}_{R_h}(x)$ es un filtro propio de A, por el Teorema del filtro optimal, $h^{-1}_{R_h}(x)$ es intersección de todos los filtros optimales de A que lo contienen. Entonces $a \in h^{-1}(x)$ si y sólo si $\forall y \in Opt(B), h^{-1}_{R_h}(y) \subseteq x \Rightarrow a \in y$. Por lo tanto, $\beta(h(a)) = h_{R_h}(\beta(a))$. □

Ahora estamos en condiciones de definir las relaciones que serán los duales de los homomorfismos.

Denotaremos a un espacio generalizado $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ simplemente por el conjunto principal X cuando no exista confusión. También recordemos que el conjunto

$$S(X) = \{U \in D(X) : \max U^c \subseteq X_0\},$$

es un semiretículo distributivo acotado.

Definición 3.28. Sean X e Y dos espacios de Priestley generalizados. Un subconjunto $R \subseteq X \times Y$ es una meet-relación generalizada ($\wedge$-relación generalizada), o una relación de Priestley generalizada, o un morfismo generalizado de Priestley, si:

1. Para todo $U \in S(Y)$, se tiene que $h_R(U) \in S(X)$.
2. Para cada $x \in X$, si $y \notin R(x)$, existe $U \in S(Y)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$.

Si $R \subseteq X \times Y$ es una relación de Priestley generalizada, entonces la función

$$h_R : S(Y) \to S(X)$$

es un homomorfismo de semiretículos. Diremos que la relación R es total si satisface la condición adicional

- Para cada $x \in X$ existe un $y \in Y$ tal que $(x,y) \in R$.

En este caso $h_R(\emptyset) = \emptyset$.

Proposición 3.29. *Sean X e Y dos espacios de Priestley generalizados. Sea $R\subseteq X \times Y$ una $\wedge$-relación generalizada. Entonces las siguientes condiciones se verifican:*

1. $\leq_X \circ R \subseteq R$.
2. $R\circ \leq_Y \subseteq R$.

Demostración. (1) Sean $x \leq_X y$ e $(y, z) \in R$. Si $(x, z) \notin R$ por condición (2) de la Definición 3.28 existe $U \in S(Y)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $z \notin U$. Por condición (1) de la Definición 3.28 $h_R(U) \in S(X)$. Como $R(x) \subseteq U$ se sigue que $x \in h_R(U)$. Como $h_R(U)$ es creciente, entonces $y \in h_R(U)$ y en consecuencia $R(y) \subseteq U$ y $z \in U$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\leq_X \circ R \subseteq R$.

(2) Sean $(x, y) \in R$ e $y \leq_Y z$. Si $(x, z) \notin R$ por condición (2) de la Definición 3.28 existe $U \in S(Y)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $z \notin U$. Entonces y$\notin U$, lo cual es una contradicción dado que $R(x) \subseteq U$ implica que $y \in U$. Por lo tanto $R\circ \leq_Y \subseteq R$. □

Como consecuencia inmediata de la definición de espacios de Priestley generalizados tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.30. *Sean X e Y dos espacios de Priestley generalizados y $R \subseteq X \times Y$ una relación de Priestley generalizada. Entonces la aplicación $h_R : S(Y) \to S(X)$ es un homomorfismo.*

Demostración. Sean $U, V \in S(Y)$. Entonces $h_R(U \cap V) = h_R(U) \cap h_R(V)$. Además $h_R(Y) = X$ □

Teorema 3.31. *Sean A y B dos semiretículos distributivos acotados. Sea $h : A \to B$ un homomorfismo de semiretículos preservando cero. Entonces la relación*

$$R_h \subseteq Opt(B) \times Opt(A)$$

dada por

$$(P, Q) \in R_h \Leftrightarrow h^{-1}(P) \subseteq Q$$

es una relación de Priestley generalizada tal que $\beta(h(a)) = h_{R_h}(\beta(a))$, para cada $a \in A$.

Demostración. El punto 1) y 2) de la Definición 3.28 se deduce del ítem 2) y 3) del Lema 3.27. □

Recordemos que dado un espacio de Priestley generalizado $X = \langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ la función

$$\varepsilon : X \to \mathrm{Opt}(S(X))$$

dada por

$$\varepsilon(x) = \{U \in S(X) : x \in U\}.$$

Teorema 3.32. *Sean X e Y dos espacios de Priestley generalizados. Sea $R \subseteq X \times Y$ un $\wedge$-relación generalizada. Entonces*

$$(x, y) \in R \text{ si y sólo si } (\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in R_{h_R}.$$

Demostración. Sea $(x, y) \in R$. Si $U \in h_R^{-1}(\varepsilon(x))$ entonces $h_R(U) \in \varepsilon(x)$, luego $x \in h_R(U)$ y en consecuencia $R(x) \subseteq U$. Por hipótesis $y \in R(x)$ entonces $y \in U$, de esta manera $U \in \varepsilon(y)$ y en consecuencia $h_R^{-1}(\varepsilon(x)) \subseteq \varepsilon(y)$. Luego, $\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in R_{h_R}$.

Supongamos que $(x, y) \notin R$, por (2) de la Definición 3.28 existe $U \in S(Y)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. Por lo tanto $y \notin U$ y $x \in h_R(U)$. De esta manera $U \notin \varepsilon(y)$ y $h_R(U) \in \varepsilon(x)$. Luego, $h_R^{-1}(\varepsilon(x)) \nsubseteq \varepsilon(y)$. Por lo tanto $(x, y) \in R$ si y sólo si $(\varepsilon(x), \varepsilon(y)) \in R_{h_R}$. □

La composición de dos $\wedge$-relaciones generalizadas no siempre es otra $\wedge$-relación generalizada. En consecuencia definiremos una nueva composición que asegure que sea una $\wedge$-relación generalizada.

Consideremos las relaciones de Priestley generalizadas $R \subseteq X \times Y$ y $S \subseteq Y \times Z$. Cada relación tiene asociado un homomorfismo de semiretículos distributivos. Sean $h_R : S(Y) \to S(X)$ y $h_S : S(Z) \to S(Y)$ los homomorfismos asociados. Definimos la relación

$$S * R \subseteq X \times Z$$

por

$$(x, z) \in S * R \text{ si y sólo si } (\varepsilon(x), \varepsilon(z)) \in R_{h_R \circ h_S}.$$

Observemos que

$$(x, z) \in S * R \text{ si y sólo si} \forall U \in S(Z)\, (x \in (h_R \circ h_S)(U)) \text{ entonces } z \in U.$$

El siguiente resultado es necesario para comprobar que efectivamente la composición $*$ produce una relación de Priestley generalizada.

Lema 3.33. *Sean X, Y, Z espacios de Priestley generalizados. Consideremos $\wedge$-relaciones generalizadas $R \subseteq X \times Y$ y $S \subseteq Y \times Z$. Entonces para cada $U \in S(Z)$ se tiene que*

$$(h_R \circ h_S)(U) = h_{(S*R)}(U).$$

Demostración. Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} x \in (h_R \circ h_S)(U) \Leftrightarrow & \quad (h_R \circ h_S)(U) \in \varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow & \quad U \in (h_R \circ h_S)^{-1}(\varepsilon(x)) \\ \Leftrightarrow & \quad \forall z \in Z\, ((x, z) \in S * R \Rightarrow z \in U \\ \Leftrightarrow & \quad (S * R)(x) \subseteq U \\ \Leftrightarrow & \quad x \in h_{(S*R)}(U). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(h_R \circ h_S)(U) = h_{(S*R)}(U)$. □

Teorema 3.34. *Sean X, Y, Z espacios de Priestley generalizados. Consideremos $\wedge$-relaciones generalizadas $R \subseteq X \times Y$ y $S \subseteq Y \times Z$. Entonces*

1. *La relación $S * R$ es una $\wedge$-relación generalizada.*

2. *La composición $*$ es asociativa.*

3. *$\leq_X \subseteq X \times X$ es una $\wedge$-relación generalizada.*

4. *Si $\leq_X \circ R = R$ y $R \circ \leq_Y = R$.*

Demostración. (1) Por un lado, por hipótesis para todo $(x, z) \notin S * R$ existe $U \in S(Z)$ tal que $x \in (h_R \circ h_S)(U)$ y $z \notin U$. Por lema anterior se deduce que $S * R(x) \subseteq U$ y $z \notin U$. Por otro lado, por hipótesis, para todo $U \in S(Z)$, se tiene que $h_S(U) \in S(Y)$ y $h_R \circ h_S(U) \in S(X)$. Por lema anterior tenemos que $h_{S*R}(U) \in S(X)$. Por lo tanto $S * R$ es una $\wedge$-relación generalizada.
(2) Sea $T \subseteq Z \times W$ una $\wedge$-relación generalizada. Probaremos que $T * (S * R) = (T * S) * R$
Sea $x \in X$ y $w \in W$, por lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
(x, w) \in T * (S * R) \Leftrightarrow &\quad (\forall U \in S(W))(x \in h_{(S*R)} \circ h_T(U) \Rightarrow w \in U) \\
\Leftrightarrow &\quad (\forall U \in S(W))(x \in h_S \circ h_R \circ h_T(U) \Rightarrow w \in U) \\
\Leftrightarrow &\quad (\forall U \in S(W))(x \in h_R \circ h_{(T*S)}(U) \Rightarrow w \in U) \\
\Leftrightarrow &\quad (x, w) \in (T * S) * R.
\end{aligned}$$

(3) Se sigue del punto (4) de la definición de espacios generalizados de Priestley.
(4)Se sigue de la Proposición 3.29. □

3.5. Relación con los DS-espacios

Hemos visto que a un semiretículo distributivo acotado se le puede definir dos tipos de espacios topológicos y esto genera dos tipos de dualidades. La dualidad utilizando los DS-espacios acotados generaliza la conocidad dualidad de Stone para retículos distributivos acotados por medio de espacios sober, conocida también como dualidad espectral. La otra dualidad, apela a una extensión de la dualidad desarrollada por H. Priestley para los retículos distributivos acotados por medio de espacios topológicos ordenados compactos y totalmente disconexos en el orden. En consecuencia, las dos dualidades deben estar íntimamente conectadas. De hecho, la categoría de los DS-espacios es isomorfa a la categoría de los espacios de Priestley generalizados. Para lograr este resultado debemos pasar por los semiretículos distributivos acotados. Ahora veremos de una forma directa que todo espacio de Priestley generalizado tiene asociado naturalmente un DS-espacio acotado. La construcción directa de un espacio de Priestley generalizado a partir de un DS -espacio es un problema abierto.

Consideremos un espacio de Priestley generalizado $\langle X, \leq, \tau, X_0 \rangle$. Recordemos que $D(X)$ es el retículo distributivo acotado de todos los clopen crecientes del espacio de Priestley asociado $\langle X, \leq, \tau \rangle$. También recordemos que

$$S(X) = \{U \in D(X) : \max U^c \subseteq X_0\}$$

es un semiretículo distributivo acotado.

Consideremos la familia

$$S(X)^c = \{X_0 - U : U \in S(X)\}\,.$$

Lema 3.35. *Sea $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ un espacio de Priestley generalizado. Entonces la familia*

$$\{X_0 - U : U \in S(X)\}\,,$$

es una base para una topología τ_0 definida sobre X_0.

Demostración. Sean $U, V \in S(X)$. Consideremos un $x \in (X_0 - U) \cap (X_0 - V)$. Entonces $x \in X_0$ y $x \notin U, V$. Luego por la definición de espacio de Priestley generalizado 3.20, existe un W tal que $x \notin W$ y $U \cup V \subseteq W$. Entonces

$$x \in X_0 - W \subseteq (X_0 - U) \cap (X_0 - V).$$

Por lo tanto, $S(X)^c$ es una base para una topología τ_0. $\square$

Teorema 3.36. *Sea $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ un espacio de Priestley generalizado. Entonces la terna*

$$\langle X_0, \tau_0\rangle$$

es un DS-espacio compacto donde τ_0 es la topología generada por la familia $S(X)^c$.

Demostración. Por el lema anterior, $\{X_0 - U : U \in S(X)\}$ es base de la topología τ_0.

Sea $KO(X_0)$ el conjunto de todos los abiertos y compacto del espacio $\langle X_0, \tau_0\rangle$. Probemos que

$$KO(X_0) = \{X_0 - U : U \in S(X)\}\,.$$

Sea $U \in S(X)$. Supongamos que

$$X_0 - U \subseteq \bigcup \{X_0 - V : V \in A \subseteq S(X)\}\,.$$

Entonces

$$(X_0 - U] \subseteq \bigcup \{(X_0 - V] : V \in A \subseteq S(X)\}\,.$$

Recordemos que $(X_0 - U] = X - U$, para cada $U \in S(X)$. Entonces

$$X - U \subseteq \bigcup \{X - V : V \in A \subseteq S(X)\}\,.$$

Como $X - U$ es un conjunto cerrado en el espacio de Priestley $\langle X, \leq, \tau\rangle$, entonces $X - U$ es compacto. Por lo tanto, existe una familia finita $V_1, \ldots, V_n$ tal que $X - U \subseteq (X - V_1) \cup \ldots \cup (X - V_n)$. Entonces, $X_0 - U \subseteq (X_0 - V_1) \cup \ldots \cup (X_0 - V_n)$. Por lo tanto $X_0 - U$ es compacto. Como $X_0 - U$ es un abierto, entonces $\{X_0 - U : U \in S(X)\} \subseteq KO(X_0)$.

Sea $U \in KO(X_0)$. Como U es un abierto, es unión de elementos de $\{X_0 - U : U \in S(X)\}$, y al ser compacto, es unión finita de elementos de $\{X_0 - U : U \in S(X)\}$. Como $S(X)$ es cerrado bajo intersecciones finitas, entonces $\{X_0 - U : U \in S(X)\}$ es cerrado bajo uniones finitas. Por lo tanto, $U \in \{X_0 - U : U \in S(X)\}$. En consecuencia, $KO(X_0) = \{X_0 - U : U \in S(X)\}$.

Como $\emptyset \in S(X)$, entonces $X_0 = X_0 - \emptyset \in KO(X_0)$, y por lo tanto X_0 es compacto. Es sencillo comprobar que X_0 es T_0.

Consideremos un subconjunto cerrado Y de X_0 y una subfamilia $\{U_i = X_0 - V_i : i \in I\}$ dualmente directa de abiertos y compactos de X_0, es decir, es una subfamilia de $S(X)^c$. Supongamos que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I$. Como F es cerrado, entonces existe una familia $\{W_k : k \in K\} \subseteq S(X)$ tal que $Y = \bigcap \{W_k : k \in K\}$. Como $(X_0 - V_i] = X - V_i$, entonces $\{X - V_i : i \in I\}$ es también es una familia directa. En consecuencia la familia $I = \{V_i : i \in I\}$ de elementos de $S(X)$ es un ideal de orden. Consideremos el filtro F generado por la familia $\{W_k : k \in K\}$. Entonces es fácil probar que $F \cap I = \emptyset$. Luego existe un filtro primo o irreducible P de $S(X)$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$. Como $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ un espacio de Priestley generalizado, existe un $x \in X$ tal que $\varepsilon(x) = P$. Entonces $x \in Y$ y $x \in V_i$, para todo $i \in I$. Por lo tanto $x \in Y \cap \bigcap \{X_0 - V_i : i \in I\}$. Luego, $\langle X_0, \tau_0\rangle$ es un DS-espacio compacto. □

Sea $\langle X, \leq, \tau, X_0\rangle$ un espacio de Priestley generalizado. De acuerdo al teorema anterior, el espacio $\langle X_0, \tau_0\rangle$ es un DS-espacio, donde $KO(X_0) = \{X_0 - V : V \in S(X)\}$. Entonces

$$D(X_0) = \{U \subseteq X_0 : X_0 - U \in KO(X_0)\}.$$

Por lo tanto, $U \in D(X_0)$ si y sólo si existe $V \in S(X)$ tal que $X_0 - U = X_0 - V$. Es decir, $U = V \cap X_0$. Entonces

$$D(X_0) = \{U \subseteq X_0 : \exists V \in S(X)\,(U = V \cap X_0)\}.$$

Esta observación será utilizada en el siguiente teorema.

Teorema 3.37. *Sean X e Y dos espacios de Priestley generalizados. Sea $R \subseteq X \times Y$ una $\wedge$-relación generalizada. Entonces la relación*

$$R_0 = R \cap (X_0 \times Y_0),$$

es una $\wedge$-relación entre los DS-espacios X_0 e Y_0.

Demostración. Sea $U \in D(Y_0)$. Entonces existe un $V \in S(Y)$ tal que $U = V \cap X_0$. Probemos que $h_{R_0}(U) = h_R(V) \cap X_0$. Sea $x \in h_R(V) \cap X_0$. Entonces $R(x) \subseteq V$ y $x \in X_0$. Luego, $R_0(x) \subseteq V \cap Y_0 = U$, es decir, $x \in h_{R_0}(U)$.

Para la otra inclusión, supongamos que $x \in h_{R_0}(U)$ pero $x \notin h_R(V) \cap X_0$. Entonces $R(x) \nsubseteq V$. Por lo tanto existe un $y \in Y$ tal que $y \in R(x)$ y $y \notin V$. Luego, $y \in Y - V = (Y_0 - V]$, es decir, existe un $z \in Y_0$ tal que $y \leq z$ y $z \notin V$. Como $(x, y) \in R$ e $y \leq z$, entonces $(x, z) \in R$. Luego, $(x, z) \in R_0$, es decir, $z \in R_0(x) \subseteq U$, pero esto implica que $z \in U \cap Y_0 = V$, lo que es imposible. Por lo tanto, $x \in h_R(V) \cap X_0$.

Como $h_{R_0}(U) = h_R(V) \cap X_0$, $X_0 - h_{R_0}(U) = X_0 - h_R(V)$, y como $h_R(V) \in S(X)$, entonces $h_{R_0}(U) \in D(X_0)$.

Probemos que la relación R_0 es punto cerrada. Sea $(x, y) \in X_0 \times Y_0$, tal que $y \in R_0(x)$. Entonces $y \notin R(x)$. Como R es punto cerrada, existe un $U \in S(Y)$ tal que $R(x) \subseteq U$ e $y \notin U$. Entonces $y \notin U \cap Y_0 = V \in D(Y_0)$. Luego hemos encontrado un $V \in D(Y_0)$ tal que $R_0(x) \subseteq V$ e $y \notin V$. Por lo tanto R_0 es punto cerrada. $\square$

4 Semiretículos implicativos

De la misma manera en que se realizó para semiretículos distributivos acotados, en este capítulo se hará la construcción de un espacio topológico asociado a los semiretículos implicativos, llamados espacios generalizado de Esakia.

4.1. Definiciones preliminares

Recordemos la definición de semiretículos implicativos [15] y [16].

Definición 4.1. Un semiretículo implicativo, o IS-álgebra, es un álgebra $\langle L, \wedge, \rightarrow, 1\rangle$ de tipo (2,2,0) tal que:

1. $\langle L, \wedge, 1\rangle$ es un semiretículo,
2. para todo $a, b, c \in L$,
$$a \wedge b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq b \rightarrow c.$$

En la siguiente proposición recopilamos algunas propiedades de las IS-álgebras.

Proposición 4.2. *Sea L una IS-álgebra. Entonces las siguientes propiedades son válidas:*

1. $1 \rightarrow a = a$, $a \rightarrow 1 = 1$.
2. $b \leq a \rightarrow b$.
3. $a \leq b$ si y sólo si $a \rightarrow b = 1$.
4. $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$.
5. Si $a \leq b$, entonces $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ y $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$.
6. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.
7. $a \rightarrow (b \rightarrow c) = (a \wedge b) \rightarrow c = (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$.
8. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.
9. $((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow b = a \rightarrow b$.
10. $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$.
11. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

Demostración. Ver [9]. □

Veamos ahora un ejemplo que será de fundamental importancia en la representación de los semiretículos implicativos.

Primero recordemos que dado un conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$ en el conjunto de todos los subconjuntos crecientes $\mathcal{P}_c(X)$ es posible definir una operación binaria $\Rightarrow$ de la siguiente forma:

$$U \Rightarrow V = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\},$$

para cada $U, V \in \mathcal{P}_c(X)$. Notemos que la operación $\Rightarrow$ tambien puede ser definida como

$$U \Rightarrow V = (U \cap V^c]^c$$

para cada $U, V \in \mathcal{P}_c(X)$.

Lema 4.3. *Para cada conjunto ordenado $\langle X, \leq \rangle$ la estructura $\langle \mathcal{P}_c(X), \cap, \Rightarrow, X \rangle$ es un IS-álgebra.*

Definición 4.4. Una IS-álgebra L es acotada, si existe un elemento $0 \in L$ tal que $0 \neq 1$ y $x \wedge 0 = 0$, para todo $x \in L$.

Definición 4.5. Sean A y B dos semiretículos implicativos. Sea $h : A \to B$ una función. Diremos que h es un homomorfismo de semiretículos implicativos si satisface las siguientes condiciones:

1. $h(1) = 1$.
2. $h(a \longrightarrow b) \leq h(a) \to h(b)$, para todo $a, b \in A$.

Ahora probaremos que en semiretículos implicativos la noción de homomorfismo coincide con la noción de homomorfismo de semiretículo.

Proposición 4.6. *Sean A y B dos semiretículos implicativos. Sea $h : A \to B$ una función tal que $h(1) = 1$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$, para todo $a, b \in A$.*
2. *$h(a \longrightarrow b) \leq h(a) \to h(b)$, para todo $a, b \in A$.*

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$ Sean $a, b \in A$, de ítem (6) de la Proposición 4.2 se deduce que $a \wedge (a \to b) \leq b$. Como h satisface 1), h es una función monótona creciente. Luego $h(a \wedge (a \to b)) \leq h(b)$. Nuevamente por 1) $h(a \wedge (a \to b)) = h(a) \wedge h(a \to b) \leq h(b)$. Y por definición de implicación,

$$h(a \to b) \leq h(a) \to h(b).$$

$2) \Rightarrow 1)$ Probemos primero que h es monótona creciente. Sea $a \leq b$, entonces $a \to b \leq 1$. De esta manera $h(a \to b) = h(1) = 1$. Luego por 2) se tiene $h(a \to b) = 1 \leq h(a) \to h(b)$. Por lo tanto $h(a) \to h(b) = 1$ y en consecuencia $h(a) \leq h(b)$.

Como $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$ entonces $h(a \wedge b) \leq h(a)$ y $h(a \wedge b) \leq h(b)$. Por lo tanto

$$h(a \wedge b) \leq h(a) \wedge h(b).$$

Por ítem (2) de la Proposición 4.2 tenemos que $a \leq b \to a = 1 \wedge (b \to a) = (b \to b) \wedge (b \to a)$. Luego por ítem (8) de la Proposición 4.2 $a \leq b \to (a \wedge b)$. Como h es monótona $h(a) \leq h(b \to (a \wedge b))$, entonces por 2) tenemos $h(a) \leq h(b) \to h(a \wedge b)$. Luego por definición

$$h(a) \wedge h(b) \leq h(a \wedge b).$$

□

4.2. Dualidad de Priestley para semiretículos implicativos

Recordemos que un espacio de Esakia, es un espacio de Priestley $X = \langle X, \tau, \leq \rangle$ donde todo conjunto decreciente $(U]$ es clopen para cada clopen U.

Probaremos que un $\wedge$-semiretículo implicativo acotado L es isomorfo a $S(Opt(L))$. De esta manera, obtendremos un nuevo teorema de representación para $\wedge$-semiretículos implicativos acotados y probaremos que un espacio generalizado de Esakia X es isomorfo en orden y homeomorfo a $Opt(S(X))$.

Sean L un $\wedge$-semiretículo implicativo acotado. Para $a, b \in L$ consideremos

$$\begin{aligned} \beta(a) \to \beta(b) &= (\beta(a) - \beta(b)]^c \\ &= \{x \in Opt(L) : [x) \cap \beta(a) \subseteq \beta(b)\}. \end{aligned}$$

Lema 4.7. *Sean L un $\wedge$-semiretículo implicativo acotado y $a, b \in L$. Entonces*

$$\beta(a \to b) = \beta(a) \to \beta(b).$$

Demostración. Probemos $\subseteq$). Supongamos que $x \in \beta(a \to b)$ e $y \in [x) \cap \beta(a)$. Por un lado tenemos $a \to b \in x$ y por otro $x \subseteq y$ y $a \in y$. Luego, $a, a \to b \in y$, en consecuencia $b \in y$ e $y \in \beta(b)$. Por lo tanto, $[x) \cap \beta(a) \subseteq \beta(b)$. Entonces $x \in \beta(a) \to \beta(b)$, por lo tanto probamos que $\beta(a \to b) \subseteq \beta(a) \to \beta(b)$.

$\supseteq$) Ahora supongamos que $x \in \beta(a) \to \beta(b)$. Si $x \notin \beta(a \to b)$ entonces $a \to b \notin x$. Sea F el filtro de L generado por $\{a\} \cup x$. Si existe $c \in F \cap (b]$ entonces existe $d \in x$ tal que $a \wedge d \leq c \leq b$. De esta manera, $d \leq a \to b$ y en consecuencia $a \to b \in x$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F \cap (b] = \emptyset$. Por teorema del filtro primo, existe $y \in X(L)$ tal que $F \subseteq y$ y $b \notin y$, de lo cual se deduce que $x \subseteq y$, $a \in y$ y $b \notin y$. Luego, $y \in [x) \cap \beta(a)$ e $y \notin \beta(b)$. Entonces $[x) \cap \beta(a) \nsubseteq \beta(b)$ por lo que $x \notin \beta(a) \to \beta(b)$, tenemos una contradicción. Se concluye que, si $x \in \beta(a) \to \beta(b)$ entonces $\beta(a) \to \beta(b) \subseteq \beta(a \to b)$. □

Sea X un espacio de Priestley. Observemos que para cada clopen U en X tiene la forma $\bigcup_{i=1}^{n}(U_i-$

$V_i)$, donde $U_i, V_i \in D(X)$ y para X un espacio de Esakia $(U]$ es clopen para cada clopen U de X.

Sea X un espacio generalizado de Priestley, entonces cada clopen U en X tiene la forma $\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(U_i - V_j)$ donde $U_i, V_j \in S(X)$.

Definición 4.8. Sea X un espacio generalizado de Priestley y U un clopen en X. Llamaremos a U *clopen de Esakia* si $U = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i - V_i)$ donde $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n \in S(X)$.

Lema 4.9. *Sea X un espacio generalizado de Priestley y U un clopen de Esakia en X. Entonces* $max(U) \subseteq X_0$.

Demostración. Sea U un clopen de Esakia, entonces existe $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_n \in S(X)$ tal que $U = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i - V_i)$. De esta manera

$$max(U) = max[\bigcup_{i=1}^{n}(U_i - V_i)] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} max(U_i - V_i) = \bigcup_{i=1}^{n} max(U_i \cap V_i^c).$$

Dado que U_i es un conjunto creciente, V_i^c un conjunto decreciente y $V_i \in S(X)$; es decir V_i es un clopen admisible en X_0; tenemos que $max(U_i \cap V_i^c) \subseteq max(V_i^c) \subseteq X_0$. Por lo tanto,

$$max(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} max(U_i \cap V_i^c) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} max(V_i^c) \subseteq X_0.$$

□

Es importante señalar que la inversa del Lema 4.9 no es válida en general.

Definición 4.10. Llamaremos a un espacio generalizado de Priestley X, *espacio generalizado de Esakia* si para cada clopen de Esakia U en X, se tiene que $(U]$ es clopen.

Para un espacio generalizado de Esakia X y $U, V \in S(X)$, consideremos

$$U \to V = (U - V]^c = \{x \in X : [x) \cap U \subseteq V\}.$$

Proposición 4.11.

1. *Si L es un semiretículo implicativo acotado, entonces*

$$Opt(L) = \langle Opt(L), \tau, \subseteq, X(L)\rangle$$

es un espacio generalizado de Esakia.

2. *Si X es un espacio generalizado de Esakia, entonces*

$$S(X) = \langle S(X), \cap, \to, X, \emptyset\rangle$$

es un $\wedge$-semiretículo implicativo acotado.

Demostración. (1) Sea L un semiretículo implicativo acotado. Entonces L es un semiretículo distributivo acotado, luego $Opt(L)$ es un espacio generalizado de Priestley. Sea U un clopen de Esakia en $Opt(L)$, sabemos que $U = \bigcup_{i=1}^{n}(\beta(a_i) - \beta(b_i))$ donde $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in L$. Por Lema 4.7$\beta(a_i) \to \beta(b_i) = (\beta(a_i) - \beta(b_i)]^c = \beta(a_i \to b_i) \in S(Opt(L))$. Por lo tanto, $[\beta(a_i) \to \beta(b_i)]^c = (\beta(a_i) - \beta(b_i)]$ es un clopen en $Opt(L)$ para cada $i \leq n$. De esta manera, $(U] = \bigcup_{i=1}^{n}(\beta(a_i) - \beta(b_i)]$ es un clopen en $Opt(L)$ y en consecuencia $Opt(L)$ es un espacio generalizado de Esakia.

(2) Sea X un espacio generalizado de Esakia, entonces X es un espacio generalizado de Priestley y $\langle S(X), \cap, X, \emptyset\rangle$ es semiretículo distributivo acotado. Sean $U, V \in S(X)$, entonces $U - V$ es un clopen de Esakia. Así, $(U - V]$ es un clopen en X y por Lema 4.9 $max\,(U - V] = max(U - V) \subseteq X_0$. Se deduce que $U \to V = (U - V]^c \in S(X)$.

Por último, probemos para cada $U, V \in S(X)$, $U \cap W \subseteq V$ si y sólo si $W \subseteq U \to V$.

Consideremos que $U \cap W \subseteq V$. Supongamos que $x \in W$ tal que $x \notin U \to V$, entonces $[x) \cap U \nsubseteq V$. Por hipótesis, $[x) \cap U \subseteq W \cap U \subseteq V$, por lo tanto $[x) \cap U \subseteq V$ lo cual es una contradicción. Luego $W \subseteq U \to V$.

Consideremos que $W \subseteq U \to V$. Supongamos que $x \in U \cap W$ tal que $x \notin V$, entonces $x \in U$ y $x \in W$. Por hipótesis, $x \in U \to V$, entonces tenemos que $[x) \cap U \subseteq V$. En particular $x \in [x) \cap U$, por lo tanto $x \in V$, lo cual es una contradicción. Luego $U \cap W \subseteq V$. □

De esta manera probamos que $\langle S(X), \cap, \to, X, \emptyset\rangle$ es un semiretículo implicativo acotado.

De este resultado se concluye que para cada $\wedge$-semiretículo implicativo acotado L tenemos que $S(Opt(L)) = \beta[L]$. Así, obtenemos el siguiente teorema de representación.

Teorema 4.12. *(Teorema de Representación) Para cada semiretículo implicativo acotado L tenemos que $L \simeq S(Opt(L))$, es decir, para cada $\wedge$-semiretículo implicativo acotado L existe un espacio generalizado de Esakia X tal que L es isomorfo a $S(X)$.*

5 Extensión distributiva libre

Dado un semiretículo distributivo acotado L, el retículo distributivo acotado

$$D(L) = \{U = \beta(a_1) \cup \ldots \cup \beta(a_n) : a_i \in L\}$$

juega un papel muy importante. En este capítulo vamos a probar que $D(L)$ puede ser caracterizado en forma abstracta. Primero recordemos que en un semiretículo distributivo L, y de acuerdo con el Teorema 3.14, los retículos distributivos

$$D(\varphi[L]) = \langle D(\varphi[L]), \cap, \cup, X(L)\rangle$$

y

$$D(\beta[L]) = \langle D(\beta[L]), \cap, \cup, \mathrm{Opt}(L)\rangle$$

son isomorfos. Si L es acotado, entonces $D(\varphi[L])$ y $D(\beta[L])$ también son acotados. Para simplificar la notación escribiremos $D(L)$ para denotar a cualquiera de estos retículos distributivos.

5.1. Homomorfismos superiores

Recordemos que un homomorfismo de semiretículos es una función que preserva el ínfimo, el último elemento y eventualmente el primer elemento. Para dar la definición de extensión distributiva libre de un semiretículo necesitaremos primero introducir una nueva noción de homomorfismo. Vamos a definir aquellos homomorfismos de semiretículos que preservan los supremos existentes y que juegan un papel importante en el estudio de la extensión libre de un semiretículo distributivo, como veremos en la sección 5.2.

Ahora caracterizaremos a los homomorfismos de semiretículos en términos de filtros propios.

Proposición 5.1. *Sean L_1 y L_2 dos semiretículos distributivos acotados. Consideremos una función $h : L_1 \to L_2$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $h^{-1}(F) \in \mathrm{Fi}(L_1)$, para todo filtro propio F de L_2.

2. h es un homomorfismo acotado.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sean $a, b \in L$. Supongamos que $h(a \wedge b) \nleq h(a) \wedge h(b)$. Entonces existe un filtro primo P de L_2 tal que $h(a \wedge b) \in P$ y $h(a) \wedge h(b) \notin P$. Entonces $a \wedge b \in h^{-1}(P)$, y como P es filtro, $h(a), h(b) \notin P$. Luego, $a, b \notin h^{-1}(P)$, lo que es imposible pues $h^{-1}(P)$ es un filtro.

De forma similar podemos probar que $h(a) \wedge h(b) \leq h(a \wedge b)$. Como $1 \in h^{-1}(F) \in \mathrm{Fi}(L_1)$, para todo filtro F de L_2, entonces $h(1) = 1$. Si $h(0) \neq 0$, entonces existe un filtro primo P de L_2 tal que $h(0) \in P$. Luego, $0 \in h^{-1}(P)$, lo que es un absurdo pues $h^{-1}(P)$ es un filtro propio.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $F \in \mathrm{Fi}(L_2)$. Como $h(1) = 1$, $1 \in h^{-1}(F)$. Como $0 = h(0)$, entonces $h^{-1}(F) \neq L_1$. Sean $a, b \in L_1$ tal que $a \leq b$ y $a \in h^{-1}(F)$. Luego, $h(a) \leq h(b)$, pues h es una función monótona. Entonces $h(b) \in F$, pues F es filtro. De esta forma obtenemos que $b \in h^{-1}(F)$. Supongamos que $a, b \in h^{-1}(F)$. Entonces $h(a), h(b) \in F$, y como F es filtro, $h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b) \in F$, es decir, $a \wedge b \in h^{-1}(F)$. Por lo tanto $h^{-1}(F)$ es un filtro propio de L_1. □

En general, si L_1 y L_2 son dos semiretículos distributivos acotados y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo, no necesariamente deben preservar los supremos existentes. Ahora definiremos una clase particular de homomorfismo de semiretículos que serán justamente aquellos que preserven los supremos existentes.

Definición 5.2. Sean L_1 y L_2 dos semiretículos distributivos acotados y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo. Diremos que h preserva todos los supremos finitos existentes, o que es un sup-homomorfismo, o que es un homomorfismo superior, si para cada $a_1, \ldots, a_n \in L_1$, si existe $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ en L_1, entonces $h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n)$ existe en L_2 y además

$$h(a_1 \vee \cdots \vee a_n) = h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n).$$

Teorema 5.3. *Sean L_1 y L_2 dos semiretículos distributivos acotados y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para cada $a_1, \ldots, a_n, b \in L_1$, si $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [b)$, implica que $\bigcap_{i=1}^{n} [h(a_i)) \subseteq [h(b))$.*
2. *$h^{-1}(I)$ es un ideal de Frink de L_1 para cada ideal de Frink I de L_2.*
3. *$h^{-1}(P)$ es un filtro optimal de L_1 para cada filtro optimal P de L_2.*
4. *h preserva todos los supremos finitos existentes.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea I un ideal de Frink de L_2. Sean $a_1, \ldots, a_n \in h^{-1}(I)$ y $b \in L$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [b)$. Entonces $h(a_1), \ldots, h(a_n) \in I$. Como $\bigcap_{i=1}^{n} [h(a_i)) \subseteq [h(b))$ e I es un ideal de Frink de L_2, tenemos que $h(b) \in I$. Es decir, $b \in h^{-1}(I)$. Por lo tanto, $h^{-1}(I)$ es un ideal de Frink de L_1.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que P es filtro optimal P de L_2. Como H es un homomorfismo de semiretículos distributivos, $h^{-1}(P)$ es un filtro. Como $P^c = L_2 - P$ es un ideal de Frink de L_2, entonces $h^{-1}(P^c) = h^{-1}(P)^c$ es un ideal de Frink de L_1. En consecuencia, $h^{-1}(P)$ es un filtro optimal de L_1.

(3) $\Rightarrow$ (4) Supongamos que $a_1, \ldots, a_n \in L_1$ y que existe el supremo $a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Como h es un homomorfismo de semiretículos, entonces h es monótona. Luego $h(a_i) \leq h(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$, para

cada $1 \leq i \leq n$. Es decir, $h(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$ es una cota superior del conjunto $\{h(a_1), \ldots, h(a_n)\}$. Sea c otra cota superior de $\{h(a_1), \ldots, h(a_n)\}$ y supongamos que $h(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \nleq c$. Entonces por el teorema del Filtro Optimal, existe un optimal P de L_2 tal que $h(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \in P$ y $c \notin P$. Como $h(a_i) \leq c$ para cada $1 \leq i \leq n$, entonces $h(a_i) \notin P$, es decir, $a_i \notin h^{-1}(P)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Como L_1 es distributivo, el retículo $\mathrm{Fi}(L_1)$ es distributivo. Además como existe el supremo $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ entonces tenemos que $[a_1 \vee \cdots \vee a_n) = [a_1) \cap \cdots \cap [a_n)$. Como consecuencia de que $h^{-1}(P)$ es optimal, $a_1 \vee \cdots \vee a_n \notin h^{-1}(P)$, es decir, $h(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \notin P$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe el supremo del conjunto $\{h(a_1), \ldots, h(a_n)\}$.

Notemos que como h es creciente y existe el supremo $h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n)$, entonces $h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n) \leq h(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$. Si suponemos que la otra desigualdad no es verdadera, entonces existe un filtro optimal P de L_2 tal que $h(a_1 \vee \cdots \vee a_n) \in P$ y $h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n) \notin P$. De donde obtenemos que $h(a_i) \notin P$, es decir, $a_i \notin h^{-1}(P)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Razonando igual que antes y teniendo en cuenta que $[a_1 \vee \cdots \vee a_n) = [a_1) \cap \cdots \cap [a_n)$ y que $h^{-1}(P)$ es un filtro optimal de L_1, concluímos que $a_1 \vee \ldots \vee a_n \notin h^{-1}(P)$, lo que es una contradicción. Con esto hemos probado que $h(a_1) \vee \cdots \vee h(a_n) = h(a_1 \vee \cdots \vee a_n)$. □

Los sup-homomorfismos que son además un isomorfismo de orden (y por lo tanto inyectivos) cumplen una propiedad adicional que será de utilidad más adelante.

Lema 5.4. *Sean L_1 y L_2 dos semiretículos distributivos acotados y $h : L_1 \to L_2$ es un sup-homomorfismo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. h es un isomorfismo de orden.
2. Si $\bigcap_{i=1}^{n} [h(a_i)) \subseteq [h(b))$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [b)$, para cada $a_1, \ldots, a_n, b \in L_1$.

Demostración. (1) Sea h es un isomorfismo de orden. Sean $a_1, \ldots, a_n, b \in L_1$ y supongamos que $\bigcap_{i=1}^{n} [h(a_i)) \subseteq [h(b))$. Sea $d \in \bigcap_{i=1}^{n} [a_i)$. Entonces $a_i \leq d$, y como h es creciente, $h(a_i) \leq h(d)$, para cada $1 \leq i \leq n$. Luego, $h(d) \in \bigcap_{i=1}^{n} [h(a_i)) \subseteq [h(b))$, es decir, $h(b) \leq h(d)$, y al ser h un isomorfismo de orden, $b \leq d$. Por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} [a_i) \subseteq [b)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $a, b \in L_1$ tales que $h(a) \leq h(b)$, es decir $[h(b)) \subseteq [h(a))$. Luego, $[a) \subseteq [b)$. Por lo tanto $b \leq a$. □

5.2. Construcción de la extensión distributiva libre

Definición 5.5. Sea L un semiretículo distributivo. Diremos que un par $\langle D, e\rangle$ es *una extensión libre de L*, o que es el *distributive lattice envelope* de L, si

1. D es un retículo distributivo,

2. $e : L \to D$ es un homomorfismo superior inyectivo, y
3. Para cada elemento de $a \in D$ existe un subconjunto finito no vacío $X \subseteq L$ tal que $a = \bigvee e[X]$.

Para denotar a una extensión libre de L vamos a escribir $\langle D, e\rangle$ o directamente D, si no hay riesgo de confusión. Notemos que si D es una extensión distributiva libre de L, entonces $e\,[L]$ genera al retículo D. Ahora vamos a probar que una extensión libre cumple cierta propiedad de extensión, que existe y que además es única, salvo isomorfismos.

Teorema 5.6. *Sea L un semiretículo distributivo. Sea $\langle D, e\rangle$ una extensión distributiva libre de L. Entonces para cada retículo distributivo D_1 y para cada homomorfismo superior $f : L \to D_1$ existe un único homomorfismo $\bar{f}\colon D \to D_1$, tal que $f = \bar{f} \circ e$.*

Demostración. Supongamos que $\langle D, e\rangle$ es una extensión libre de L. Sea D_1 un retículo distributivo y sea $f\colon L \to D_1$ un homomorfismo superior. Probemos que existe un único homomorfismo $\bar{f}\colon D \to D_1$, tal que $f = \bar{f} \circ e$.

Sean $a, b \in D$. Por la propiedad (2) de la Definición 5.5, existen subconjuntos finitos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_k\}$ de L tales que

$$a = e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n) \text{ y } b = e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k).$$

Supongamos que $a = b$, es decir, $e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n) = e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k)$. Entonces,

$$[e(x_1)) \cap \cdots \cap [e(x_n)) = [e(y_1)) \cap \cdots \cap [e(y_k))\,.$$

Luego,

$$[e(x_1)) \cap \cdots \cap [e(x_n)) \subseteq [e(y_j))\,,$$

para todo $1 \leq j \leq k$. Como e es un homomorfismo superior inyectivo tenemos que

$$[x_1) \cap \cdots \cap [x_n) \subseteq [y_j)$$

para todo $1 \leq j \leq k$. Como f es un homomorfismo superior

$$[f(x_1)) \cap \cdots \cap [f(x_n)) \subseteq [f(y_j))\,,$$

para todo $1 \leq j \leq k$. Por lo tanto

$$[f(x_1)) \cap \cdots \cap [f(x_n)) \subseteq [f(y_1)) \cap \cdots \cap [f(y_k))\,.$$

Aplicando un argumento similar podemos probar la otra inclusión, con lo cual obtendremos la igualdad

$$[f(x_1)) \cap \cdots \cap [f(x_n)) = [f(y_1)) \cap \cdots \cap [f(y_k))\,,$$

y teniendo en cuenta que D es un retículo deducimos que

$$f(x_1) \vee \cdots \vee f(x_n) = f(y_1) \vee \cdots \vee f(y_k).$$

Por lo tanto podemos definir una función $\bar{f}\colon D \to D_1$ como

$$\bar{f}(a) = f(x_1) \vee \cdots \vee f(x_n),$$

donde $a = e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)$ para algún conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de L. Es sencillo comprobar que $\bar{f}$ es un homomorfismo de retículos. Además, si $x \in L$, entonces

$$(\bar{f} \circ e)(x) = \bar{f}(e(x)) = f(x).$$

Por lo tanto $f = \bar{f} \circ e$.

Probemos que la función $\bar{f}$ es única. Supongamos que existe otra función $g\colon D \to D_1$ tal que $f = g \circ e$. Sea $a \in D$. Entonces existe un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq L$ tal que $a = e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)$. Luego,

$$\begin{aligned} g(a) &= g(e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)) = g(e(x_1)) \vee \cdots \vee g(e(x_n)) \\ &= f(x_1) \vee \cdots \vee f(x_n) = \bar{f}(e(x_1)) \vee \cdots \vee \bar{f}(e(x_n)) \\ &= \bar{f}(e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)) = \bar{f}(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $g = \bar{f}$. □

Teorema 5.7. *Sea L un semiretículo distributivo. Sea $\langle D, e\rangle$ una extensión distributiva libre de L. Sea D_1 un retículo distributivo y sea $f : L \to D_1$ un homomorfismo superior. Entonces*

(1) Si f es inyectiva, entonces $\bar{f}$ es inyectiva.

(2) Si f es sobreyectiva, entonces $\bar{f}$ es sobreyectiva.

Demostración. (1) Sean $a, b \in D$ tales que $\bar{f}(a) = \bar{f}(b)$. Entonces existen subconjuntos finitos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_k\}$ de L tales que $a = e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)$ y $b = e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k)$. Luego,

$$\bar{f}(a) = \bar{f}(e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)) = \bar{f}(e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k)) = \bar{f}(b).$$

Ya que f es un homomorfismo superior tenemos que $\bar{f}(e(x_1)) \vee \cdots \vee \bar{f}(e(x_n)) = \bar{f}(e(y_1)) \vee \cdots \vee \bar{f}(e(y_k))$ y por lo tanto

$$\left[\bar{f}(e(x_1))\right) \cap \cdots \cap \left[\bar{f}(e(x_n)\right) = \left[\bar{f}(e(y_1))\right) \cap \cdots \cap \left[\bar{f}(e(y_k)\right).$$

Como $[f(e(x_1))) \cap \cdots \cap [f(e(x_n)) \subseteq [f(e(y_j)))$ para cada $1 \leq j \leq k$ y f es un homomorfismo superior inyectivo, entonces

$$[e(x_1)) \cap \cdots \cap [e(x_n)) = [e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)) \subseteq [e(y_j))$$

para cada $1 \leq j \leq k$. Luego, $e(y_j) \leq e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)$ para cada $1 \leq j \leq k$ y en consecuencia $e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k) \leq e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n)$. Utilizando un argumento similar obtenemos la desigualdad

$e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n) \leq e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k)$. Entonces,

$$a = e(x_1) \vee \cdots \vee e(x_n) = e(y_1) \vee \cdots \vee e(y_k) = b.$$

Por lo tanto $\bar{f}$ es inyectiva.

(2) Es inmediato. □

Ahora probaremos que la extensión distributiva libre existe y es única. Como veremos en la prueba del siguiente teorema, el par $\langle D(L), \beta \rangle$, o el par $\langle D(L), \varphi \rangle$, o directamente $D(L)$ es el ejemplo canónico de extensión distributiva libre.

Teorema 5.8. *Sea L un semiretículo distributivo. Entonces la extensión libre de L existe y es única, salvo isomorfismos.*

Demostración. Consideremos el par $\langle D(L), \beta \rangle$. Sabemos que $\beta : L \to D(L)$ es un homomorfismo superior inyectivo y que además $\beta\,[L]$ genera al retículo distributivo $D(L)$. Por lo tanto el par $\langle D(L), \beta \rangle$ es una extensión distributiva libre de L.

Ahora vamos a probar que si $\langle D_1, e_1 \rangle$ y $\langle D_2, e_2 \rangle$ son dos extensiones distributivas libres, entonces D_1 es isomorfo a D_2. Como $\langle D_1, e_1 \rangle$ es una extensión distributiva libre y $e_2 : L \to D_2$ es un homomorfismo superior inyectivo, entonces existe un único homomorfismo inyectivo $\bar{e}_2 \colon D_1 \to D_2$ tal que $\bar{e}_2 \circ e_1 = e_2$. Probemos que la función $\bar{e}_2 : D_1 \to D_2$ es biyectiva. Por el lema anterior, como e_2 es inyectiva, $\bar{e}_2$ es inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Sea $b \in D_2$. Entonces existe una familia finita $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de L tal que $b = e_2(x) \vee \ldots \vee e_2(x_n)$. Consideremos el elemento $a = e_1(x_1) \vee \ldots \vee e_1(x_n) \in D_1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\bar{e}_2(a) &= \bar{e}_2(e_1(x_1) \vee \ldots \vee e_1(x_n)) \\
&= \bar{e}_2(e_1(x_1)) \vee \ldots \vee \bar{e_2}(e_1(x_n)) \\
&= (\bar{e}_2 \circ e_1)(x_1) \vee \ldots \vee (\bar{e}_2 \circ e_1)(x_n) \\
&= e_2(x) \vee \ldots \vee e_2(x_n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{e}_2$ es biyectiva, entonces es un isomorfismo de retículos. □

Lema 5.9. *Sea L un semiretículo distributivo. Sea $\langle D, e \rangle$ su extensión libre. Entonces*

1. $[e\,[F]) \in \mathrm{Fi}(D)$*, para cada* $F \in \mathrm{Fi}(L)$*,*
2. $e^{-1}(H) \in \mathrm{Fi}(L)$*, para cada* $H \in \mathrm{Fi}(D)$*.*

Demostración. (1) Consideremos un filtro $F \in \mathrm{Fi}(L)$. Sean $a, b \in [e\,[F])$. Entonces existe $f_1, f_2 \in F$ tal que $e(f_1) \leq a$ y $\varphi(f_2) \leq b$. Entonces $e(f_1 \wedge f_2) \leq a \wedge b$, y como $f_1 \wedge f_2 \in F$, entonces $a \wedge b \in [e\,[F])$. Claramente $[e\,[F])$ es creciente y además $1 \in [e\,[F])$. Por lo tanto $[e\,[F]) \in \mathrm{Fi}(D)$.

(2) Sea $H \in Fi\,(D)$. Sean $a, b \in L$ tal que $a \leq b$ y $a \in e^{-1}(H)$. Entonces $e(a) \in H$ y dado que e es un homomorfismo creciente tenemos que $e(a) \leq e(b)$. En consecuencia $e(b) \in H$. Luego $b \in e^{-1}(H)$. Por lo tanto $e^{-1}(H) \in \mathrm{Fi}(L)$. □

5.3. Aplicaciones

Vamos a finalizar este trabajo demostrando algunas aplicaciones de la extensión distributiva libre de un semiretículo distributivo. Vamos a analizar la relación que existe entre ideales de Frink e ideales de Frink primos de un semiretículos distributivo L, e ideales e ideales primos de la extensión libre $\langle D, e\rangle$.

Recordemos que un ideal de Frink I es *primo* si $a \in I$ o $b \in I$, cuando $a \wedge b \in I$. Vamos a denotar con $I_{Fp}(L)$ el conjunto ordenado de los ideales de Frink primos de L. El conjunto ordenado de los ideales primos de un retículo distributivo L es denotado por $\mathrm{Id}^p(L)$.

Teorema 5.10. *Sea L un semiretículo distributivo. Sea $\langle D, e\rangle$ su extensión libre. Entonces*

1. $\mathrm{Id}_F(L) \cong \mathrm{Id}(D)$.
2. $\mathrm{Id}_{Fp}(L) \cong \mathrm{Id}^p(D)$.

Demostración. (1) Consideremos $J \in \mathrm{Id}_F(L)$. Entonces sea $I(e(J))$ el ideal generado por $e(I)$ en D. Es decir, $a \in I(e(J))$ si y sólo si existen $a_1, \ldots, a_n \in J$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Definimos la aplicación

$$\alpha : \mathrm{Id}_F(L) \to \mathrm{Id}(D)$$

por

$$\alpha(J) = I(e(J)),$$

para cada $J \in \mathrm{Id}_F(L)$.

Veamos que α es un isomorfismo de orden sobreyectivo. Sean $J_1, J_2 \in \mathrm{Id}_F(L)$. Es claro que si $J_1 \subseteq J_2$ entonces $I(e(J_1)) \subseteq I(e(J_2))$. Para probar la otra inclusión, supongamos que $I(e(J_1)) \subseteq I(e(J_2))$ y que $J_1 \nsubseteq J_2$. Entonces existe un elemento $a \in J_1$ tal que $a \notin J_2$. Como $a \in J_1$, entonces $e(a) \in e(J_1) \subseteq I(e(J_1)) \subseteq I(e(J_2))$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in J_2$ tales que $e(a) \leq e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Entonces $\bigcap [e(a_i)) \subseteq [e(a))$, y como e es un homomorfismo superior inyectivo obtenemos $\bigcap [a_i) \subseteq [a)$. Ya que $a_1, \ldots, a_n \in J_2$ y J_2 es un ideal de Frink, $a \in J_2$, lo que es un absurdo. Por lo tanto, $J_1 \subseteq J_2$.

Veamos que α es sobreyectiva. Consideremos un ideal $H \in \mathrm{Id}(D)$. Veamos que $e^{-1}(H) \in \mathrm{Id}_F(L)$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in e^{-1}(H)$ y supongamos que $\bigcap [a_i) \subseteq [a)$. Entonces $e(a_1), \ldots, e(a_n) \in H$. Como H es un ideal $e(a_1) \vee \ldots \vee e(a_n) \in H$, y como es decreciente $e(a) \in H$. Luego, $a \in e^{-1}(H)$. Por lo tanto $e^{-1}(H) \in \mathrm{Id}_F(L)$.

Como $e^{-1}(H)$ es un ideal de Frink, veamos ahora que $\alpha(e^{-1}(H)) = H$, es decir, $I(e(e^{-1}(H))) = H$. Sea $a \in H$. Como H es un ideal de D, existen $a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Como $e(a_i) \leq a \in H$, entonces $e(a_i) \in H$. Luego $a_i \in e^{-1}(H)$ y en consecuencia, $e(a_i) \in e(e^{-1}(H)) \subseteq I(e(e^{-1}(H)))$. Por lo tanto, $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n) \in I(e(e^{-1}(H)))$.

Para la otra inclusión, consideremos $a \in I(e(e^{-1}(H))$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in e^{-1}(H)$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Como $e(a_i) \in H$ y al ser H un ideal de D, $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n) \in H$.

(2) Sea J un ideal de Frink primo. Veamos que $\alpha(J) = I(e(J))$ es un ideal primo de D. Sea $a \wedge b \in I(e(J))$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in L$ tal que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$ y

$b = e(b_1) \vee \cdots \vee e(b_k)$. Luego,

$$a \wedge b = \bigvee_{i=1}^{n} e(a_i) \wedge \bigvee_{l=1}^{k} e(b_l) = \bigvee_{i,l} (e(a_i) \wedge e(b_l)) \in I(e(J)).$$

Entonces $e(a_i) \wedge e(b_l) = e(a_i \wedge b_l) \in e(J)$. Luego, al ser J primo, y e inyectivo, $a_i \in J$ ó $b_l \in J$. Si observamos la secuencia $a_1 \wedge b_1, \ldots, a_1 \wedge b_k$ y suponemos que $a_1 \notin J$, entonces $b_1, \ldots, b_k \in J$ y en consecuencia, $b = \bigvee_{l=1}^{k} e(b_l) \in I(e(J))$.En caso contrario tendríamos que $a_1 \in J$. Ahora si observamos la secuencia $a_2 \wedge b_1, \ldots, a_2 \wedge b_k$ y suponemos que $a_2 \notin J$, entonces tenemos que $b = \bigvee_{l=1}^{k} e(b_l) \in I(e(J))$. En caso contrario obtendríamos que $a_2 \in J$. Siguiendo así podemos seguir con el razonamiento para cada secuencia $a_i \wedge b_1, \ldots, a_i \wedge b_k$ y suponiendo que $a_i \notin J$, obtenemos que $b = \bigvee_{l=1}^{k} e(b_l) \in I(e(J))$, ó $a_i \in J$. Por lo tanto, $a = \bigvee_{i=1}^{n} e(a_i) \in I(e(J))$ ó $b = \bigvee_{l=1}^{k} e(b_l) \in I(e(J))$. Entonces $I(e(J))$ es un ideal primo de D.

Consideremos un ideal $H \in \mathrm{Id}^p(D)$. Sabemos que $e^{-1}(H) \in \mathrm{Id}_F(L)$. Sean $a, b \in L$ tal que $a \wedge b \in e^{-1}(H)$. Entonces $e(a \wedge b) = e(a) \wedge e(b) \in H$, y como H es primo, $e(a) \in H$ ó $e(b) \in H$. Es decir, $a \in e^{-1}(H)$ ó $b \in e^{-1}(H)$. Por lo tanto, $e^{-1}(H)$ es un ideal de Frink primo. □

Ahora vamos a estudiar la relación que existe entre filtros optimales de un semiretículo distributivo L y su extensión distributiva libre $D(L)$.

Teorema 5.11. *Sea L un semiretículo distributivo. Sea $\langle D, e\rangle$ la extensión libre de L. Entonces*

1. *Si $F \in \mathrm{Opt}(L)$, entonces $[e(F)) \in \mathrm{X}(D)$.*
2. *Si $P \in X(D)$, entonces $e^{-1}(P) \in Opt(L)$ y además $P = \big[e(e^{-1}(P))\big)$.*

Demostración. (1) Consideremos $F \in Opt(L)$. Es sencillo comprobar que $[e(F))$ es un filtro de $D(L)$. Sean $a, b \in D(L)$ tales que $a \vee b \in [e(F))$. Entonces existe $f \in F$ tal que $\varphi(f) \leq a \vee b$. Como $a, b \in D(L)$, existen $b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$ y $b = e(b_1) \vee \cdots \vee e(b_m)$. Entonces $e(f) \leq e(b_1) \vee \cdots \vee e(b_n) \vee e(c_1) \vee \cdots \vee e(c_m)$, y por el Teorema 3.12, $[a_1) \cap \cdots \cap [a_n) \cap [b_1) \cap \cdots \cap [b_m) \subseteq [f)$. Como $f \in F$ y F es optimal, existe algún $a_i \in F$ para $1 \leq i \leq n$, ó existe un $b_j \in F$, para $1 \leq j \leq m$. Entonces existe algún $e(a_i) \in e(F)$ para $1 \leq i \leq n$, ó existe un $e(b_j) \in e(F)$, para $1 \leq j \leq m$. Luego, $a \in [e(F))$ ó $b \in [e(F))$. Por lo tanto $[e(F))$ es primo.

(2) Sea $P \in X(D(L))$. Es fácil comprobar que $e^{-1}(P)$ es un filtro optimal de L. También es sencillo comprobar que $\big[e(e^{-1}(P))\big) \subseteq P$. Sea $a \in P$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Como P es un filtro primo de $D(L)$, entonces existe un $a_i \in L$ tal que $e(a_i) \in P$. Luego $a_i \in e^{-1}(P)$ y en consecuencia $e(a_i) \in e(e^{-1}(P)) \subseteq \big[e(e^{-1}(P))\big)$. □

Teorema 5.12. *Sea L un semiretículo distributivo y sea $\langle D, e\rangle$ su extensión libre. Entonces $Opt(L) \cong X(D)$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $\lambda : Opt(L) \to X(D)$ definida por

$$\lambda(F) = [e(F)) .$$

Por afirmación (1) del Teorema anterior λ está bien definida. También sabemos que es sobreyectiva. Veamos que λ es un isomorfismo de orden. Sean $F_1, F_2 \in Opt(L)$ tales que $F_1 \subseteq F_2$. Sea $a \in [e(F_1))$. Entonces existe un $f \in F_1$ tal que $e(f) \leq a$. Como $a \in D$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in L$ tales que $a = e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$. Luego de $e(f) \leq e(a_1) \vee \cdots \vee e(a_n)$ y teniendo en cuenta que e es un homomorfismo superior inyectivo, obtenemos que $[a_1) \cap \cdots \cap [a_n) \subseteq [f)$, y como F_1 es optimal, existe un $a_i \in F_1$. Luego $e(a_i) \in e(F_1) \subseteq [e(F_1)) \subseteq [e(F_2))$. Entonces $e(a_i) \in [e(F_2))$ y por lo tanto $a \in [e(F_2))$.

Si $[e(F_1)) \subseteq [e(F_2))$, entonces es fácil comprobar que $F_1 \subseteq F_2$. Por lo tanto λ es un isomorfismo de orden y en consecuencia $Opt(L) \cong X(D)$. □

Bibliografía

[1] Balbes R., Dwinger P.,:*Distributive Lattices*. University of Missourri Press (1974). 1

[2] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Priestley style duality for distributive meet-semilattices*. Studia Logica **98** (2011), 83–122. (document), 3

[3] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Generalized Priestley quasi-orders*. Order **28** (2011), 201–220. (document), 3

[4] Bezhanishvili G. and Jansana R.: *Esakia Style Duality for Implicative Semilattices,* Applied Categorical Structures, Volume 21, Issue 2, (2013), pp 181-208 3

[5] Burris S, Sankappanavar H. P., *A course in Universal Algebra.* 1

[6] Celani S. A., T*opological representation of distributive semilattice,* Scientiae Math. Japonicae online, Vol. 8 (2003), 41-51 (document), 1.3, 1.4, 1.4, 2, 2.3, 3.4

[7] Celani S. A., *Representation of Hilbert algebras and Implicative Semilattice,* Central European Journal of Math., Vol. 4 (2003), 561-572 (document), 2.3

[8] Celani S. A and Calomino I. M., *Some remarks on distributive semilattices,* Comment. Math. Univ. Caroline, 2013, 54 (3), 407-428 (document), 2, 2.5, 2.10, 3.4

[9] Chajda I., Halaš R., Kűhr J.: *Semilattice Structures*. Heldermann Verlag (2007). (document), 4.1

[10] Diego A.: *Sur les algébras de Hilbert*. Ed. Hermann. Colléction de Logique Math. Serie A 21 (1966).

[11] Frink, O.: *Ideals in partially ordered sets.* Amer. Math. Monthly 61, 223-234 (1954). 1.5, 1.33, 1.5

[12] Grätzer G., *General Lattice Theory.* Birkhäuser Verlag (1998). (document), 1.3, 1.3, 1.4, 1.4

[13] Hochster M.: Prime ideal structure in commutative rings. Trans. Amer. Math. Soc., 142 43–60, (1969). (document)

[14] Johnstone, P. T.: Stone spaces. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-23893-5 (1982). (document)

[15] Köhler, P.: Brouwerian semilattices, Trans. Amer. Math. Soc., 1981, 268, 103-126. (document), 4.1

[16] W. C. Nemitz, Implicative semi-lattices, Trans. Amer. Math. Soc. 117 12, (1965). 4.1

[17] Priestley H. A.: Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces. Bull. London Math. Soc. 2 (1970), pp. 186-190. (document), 3, 3.1

[18] Priestley H. A.: Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices. Proc. London Math. Soc. 3 (1972), pp. 507-530. (document), 3, 3.1

[19] Stone M. H.: Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics. Časopis pešt. mat. fys., 67, 1–25, (1937) (document), 2

[20] Stone M. H.: The Theory of Representations of Boolean Algebras, Transactions of the American Mathematical Society 40 (1936) 37-111. (document)

[21] Varlet J. C.: *Distributive semilattices and Boolean lattices.* Bull. Soc. Roy. Liége, No. 41 (1972), 5-10. 1.4

[22] Vickers S.: Topology via logic. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. 5. Cambridge: Cambridge University Press (1989).

(document)